



MAT 141 (TURMA 1) – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I – 2017/II
1ª LISTA DE INTEGRAIS (31/10/2017)

1) Faça a antidiferenciação. Verifique o resultado, calculando a derivada de sua resposta.

(a) $\int y^3(2y^2 - 3) dy$

(c) $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}} dx$

(e) $\int e^{-x} dx$

(b) $\int \sqrt{x}(x + 1) dx$

(d) $\int \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

(f) $\int x^2 \ln(100) dx$

2) Determine a função $y = y(x)$, $y \in \mathbb{R}$ tal que

(a) $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$, $y(1) = 1$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$

3) Determine a função $y = f(x)$, definida num intervalo aberto I , com $1 \in I$ e tal que:

(a) $f(1) = -1$ e $\frac{dy}{dx} = 2y^2$, $\forall x \in I$.

(b) $f(1) = 1$ e $\frac{dy}{dx} = xy$, $\forall x \in I$.

4) Determine a função f contínua tal que:

(a) $f(\pi) = 2$ e $\int f'(x) \operatorname{tg} x dx = \operatorname{sen}^3 x - \cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$

(b) $f(0) = 5$ e $\int \operatorname{arctg} \left(\frac{f'(x)}{x} \right) dx = x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$

(c) $f(0) = 1$ e $\int (1 + x^2) f'(x) dx = x + c$, $c \in \mathbb{R}$

5) Obtenha a equação de uma curva $y = f(x)$, sabendo que o coeficiente angular da reta tangente em um de seus pontos é igual ao simétrico do dobro de sua abscissa e que o ponto $(1, 1)$ pertence a curva.

6) Em todos os pontos de uma curva $y = f(x)$ tem-se que $y'' = x^2 - 1$. Obtenha a equação desta curva que passa pelo ponto $(1, 1)$ e a reta tangente neste ponto é paralela à reta $x + 12y - 13 = 0$.

7) A velocidade de uma partícula, no instante t , em movimento numa linha reta é dada por $v(t) = \sqrt[3]{t^2}$. Determine a função horária do movimento $s(t)$ sabendo que $s(0) = 3$.

8) Uma partícula move-se ao longo de um eixo x . Determine a função posição da partícula, sabendo-se que:

(a) $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ e $x(0) = 1$

(b) $a(t) = 4 \cos(2t)$, $v(0) = -1$ e $x(0) = -3$.

9) Estima-se que daqui a t meses a população de uma certa cidade estará variando segundo uma taxa de $2 + 6\sqrt{t}$ pessoas por mês. A população atual é de 5000 pessoas. Qual a população daqui a 9 meses?

10) Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura no instante $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $100 e^{-0,01t}$ litros/min. Determine a quantidade de litros de petróleo que vazou do tanque nos primeiros sessenta minutos.

11) Mostre que:

(a) Se F é uma primitiva de f , então $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c, c \in \mathbb{R}$

(b) Para $n \neq -1$, $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + c, c \in \mathbb{R}$

12) Dado $a > 0$, mostre que:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + c$

(b) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ (d) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c$

13) Resolva (usando o método de substituição)

(a) $\int \frac{1}{3x - 2} dx$ (f) $\int \operatorname{sen}^5(x) \cos(x) dx$ (k) $\int \frac{1 - 2x}{\sqrt{3x + 2}} dx$

(b) $\int \frac{1}{(3x - 2)^2} dx$ (g) $\int \frac{3x}{5 + 6x^2} dx$ (l) $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

(c) $\int x \operatorname{sen}(x^2) dx$ (h) $\int \frac{x}{(1 + 4x^2)^2} dx$ (m) $\int \frac{x^2}{9 + x^2} dx$

(d) $\int x^2 e^{x^3} dx$ (i) $\int x \sqrt{1 + 3x^2} dx$ (n) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$

(e) $\int x^3 \cos(x^4) dx$ (j) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx$

14) Complete o quadrado e use as integrais do exercício (12) para calcular as integrais:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{2 - x - x^2}} dx$ (c) $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 8x + 25} dx$ (e) $\int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x - x^2}} dx$

(b) $\int \frac{3 - 4x}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} dx$ (d) $\int \frac{1}{2x^2 + 3x + 1} dx$

15) Calcule (usando o método de integração por partes)

(a) $\int x^2 e^x dx$ (f) $\int x e^{2x} dx$ (k) $\int \sqrt{16 - x^2} dx$

(b) $\int x^2 \ln(x) dx$ (g) $\int e^{-2x} \operatorname{sen}(x) dx$ (l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx$

(c) $\int x \sec^2(x) dx$ (h) $\int x^3 e^{x^2} dx$ (m) $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$

(d) $\int x (\ln(x))^2 dx$ (i) $\int x^3 \cos(x^2) dx$ (n) $\int \arcsen(x/4) dx$

(e) $\int (\ln(x))^2 dx$ (j) $\int e^{-x} \cos(2x) dx$ (o) $\int x \arcsen x dx$

16) Resolva as integrais

(a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$ (c) $\int \operatorname{sen} 2x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$ (e) $\int \cos^5 x dx$

(b) $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x dx$ (d) $\int \operatorname{sen} 2x \sqrt{5 + \operatorname{sen}^2 x} dx$ (f) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$

$$(g) \int \operatorname{tg} x \sec^3 x \, dx$$

$$(h) \int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx$$

$$(i) \int \operatorname{sen} x \sqrt{3 + \cos x} \, dx$$

$$(j) \int \operatorname{sen} x \sec^2 x \, dx$$

17) Calcule

$$(i) \int 2x^3 \sqrt{x} + e^{2x+3} \, dx$$

$$(ii) \int e^{\sqrt{y}} \, dx$$

$$(iii) \int 8x^2 \sqrt{6x^3 + 5} \, dx$$

$$(iv) \int \frac{\operatorname{sen} \theta}{(7 - \cos \theta)^3} \, d\theta$$

$$(v) \int \sec^2(5x + 3) \, dx$$

$$(vi) \int \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} \, dx$$

$$(vii) \int \frac{a^3 - 1}{a - 1} \, da$$

$$(viii) \int \frac{3x}{(4 - 3x^2)^8} \, dx$$

$$(ix) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} \, dx$$

$$(x) \int \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen} x \, dx$$

$$(xi) \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$(xii) \int \frac{x^3 + 1}{x - 2} \, dx$$

$$(xiii) \int \frac{1}{\sqrt{16 - (x - 1)^2}} \, dx$$

$$(xiv) \int x + \sec^2(5x) \, dx$$

$$(xv) \int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx$$

$$(xvi) \int \frac{1}{(x + 3)^2 + 4} \, dx$$

$$(xvii) \int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} \, dx$$

$$(xviii) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx$$

$$(xix) \int \cos \theta \sqrt[3]{\operatorname{sen} \theta} \, dx$$

$$(xx) \int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} \, dx$$

$$(xxi) \int x 2^{x^2} \, dx$$

$$(xxii) \int x \sqrt{x + 1} \, dx$$

$$(xxiii) \int \operatorname{sen}^3 x \, dx$$

$$(xxiv) \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$(xxv) \int \sec x \, dx$$

$$(xxvi) \int \operatorname{tg}^4 x \, dx$$

$$(xxvii) \int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}} \, dx$$

$$(xxviii) \int \frac{1}{\sqrt{8x - x^2}} \, dx$$

$$(xxix) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx$$

$$(xxx) \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} \, dx$$

18) Calcule as integrais

$$(i) \int \sqrt{1 - \cos(4x)} \, dx$$

$$(ii) \int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} \, dx$$

$$(iii) \int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

$$(iv) \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \, dx$$

$$(v) \int \frac{6x + 7}{x^2 + 4x + 4} \, dx$$

$$(vi) \int \frac{x - 1}{x^2} \, dx$$

$$(vii) \int \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \, dx$$

$$(viii) \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

$$(ix) \int \sqrt{t} \ln t \, dx$$

$$(x) \int \cos(\ln t) \, dx$$

$$(xi) \int \sec 3x \, dx$$

$$(xii) \int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x \, dx$$

$$(xiii) \int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$(xiv) \int \ln(1 + x^2) \, dx$$

$$(xv) \int \frac{x^3 + x}{x - 1} \, dx$$

$$(xvi) \int \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3} \, dx$$

$$(xvii) \int x \cos^2 x \, dx$$

$$(xviii) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx$$

$$(xix) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4} \, dx$$

$$(xx) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} \, dx$$

$$(xxi) \int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$$

$$(xxii) \int \frac{\sqrt{(1 - x^2)^3}}{x^6} \, dx$$

$$(xxiii) \int \frac{2x^4 + 4x^4 + 2x^3 + 2x - 1}{2x^3} \, dx$$

$$(xxiv) \int \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} \, dx$$

Gabarito

- 1) (a) $\frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + c$ (d) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$
 (b) $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ (e) $-e^{-x}$
 (c) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \frac{8}{3}x^{\frac{1}{2}} + c$ (f) $\frac{x^3}{3} \ln(100)$
- 2) (a) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}$ (b) $y = e^{-x} - 1$
- 3) (a) A função $f(x) = \frac{-1}{2x-1}$, $x > \frac{1}{2}$ satisfaz as condições dadas (A condição $x > \frac{1}{2}$ é para garantir que 1 pertença ao domínio de f .)
 (b) A função $y = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições dadas.
- 4) (a) $f(x) = -\cos^3 x + \sin x + 1$ 7) $\frac{3}{5} \sqrt[3]{t^5} + 3$
 (b) $f(x) = -1/6 \ln |\cos(3x^2)| + 5$ 8) (a) $x(t) = t^4/4 - 2t^3/3 + t + 1$
 (c) $f(x) = \arctg x + 1$ (b) $-\cos(2t) - t - 2$
- 5) $y = 2 - x^2$ 9) 5126 pessoas
- 6) $12y = x^4 - 6x^2 + 7x + 10$ 10) $10.000(1 - e^{-0,6})$
- 13) (a) $\frac{1}{3} \ln |3x - 2| + c$ (h) $-\frac{1}{8(1+4x^2)} + c$
 (b) $-\frac{1}{3(3x-2)} + c$ (i) $\frac{1}{9} \sqrt{(1+3x^2)^3} + c$
 (c) $-\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$ (j) $\frac{1}{\cos(x)} + c$
 (d) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$ (k) $-\frac{2\sqrt{3x+2} \cdot (6x-17)}{27}$
 (e) $\frac{1}{4} \text{sen}(x^4) + c$ (l) $\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + c$
 (f) $\frac{1}{6} \text{sen}^6(x) + c$ (m) $x - 3 \arctg\left(\frac{x}{3}\right) + c$
 (g) $\frac{1}{4} \ln(5 + 6x^2) + c$ (n) $\frac{1}{2} \arctg(x^2) + c$
- 14) (a) $\arcsen\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c$ (d) $\ln \left| \frac{2x+1}{2x+2} \right| + c$
 (b) $4\sqrt{3x-x^2-2} - 3 \arcsen(2x-3) + c$
 (c) $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 8x + 25| - \frac{13}{3} \arctg\left(\frac{x+4}{3}\right) + c$ (e) $\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \sqrt{-x^2-x+1} + c$
- 15) (a) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$ (i) $\frac{1}{2}(x^2 \text{sen } x^2 + \cos x^2) + c$
 (b) $\frac{1}{3} x^3 (\ln(x) - \frac{1}{3}) + c$ (j) $\frac{e^{-x}}{5} (2 \text{sen } 2x - \cos 2x) + c$
 (c) $x \text{tg}(x) + \ln |\cos(x)| + c$ (k) $8 \text{asin}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + c$
 (d) $\frac{x^2}{2} \left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right] + c$ (l) $8 \arcsen\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + c$
 (e) $x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + c$ (m) $\frac{1}{4} [8 \arcsen(x/4) - x\sqrt{(16-x^2)^2} + 2x\sqrt{16-x^2}] + c$
 (f) $\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + c$ (n) $\frac{x}{4} [\arcsen(x/4) + \sqrt{16-x^2}] + c$
 (g) $-\frac{1}{5} e^{-2x} (\cos x + 2 \text{sen } x) + c$ (o) $\frac{1}{2} [x^2 \arcsen(x) + \frac{\arcsen(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}] + c$
 (h) $\frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + c$
- 16) (a) $\frac{\text{sen}^3 x}{3} - \frac{\text{sen}^5 x}{5} + c$ (c) $-\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \cos^2 x)^3} + c$
 (b) $\frac{\text{sen}^4 x}{4} - \frac{\text{sen}^6 x}{6} + c$ (d) $\frac{2}{3} \sqrt{(5 + \text{sen}^2 x)^3} + c$

- (e) $\operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$
 (f) $\operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + c$
 (g) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + c$
- 17) (i) $\frac{4}{9}x^{9/2} + \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$
 (ii) $x e^{\sqrt{y}} + C$
 (iii) $\frac{8}{27}\sqrt[3]{(6x^3 + 5)^2} + C$
 (iv) $-\frac{1}{2(7-\cos\theta)^2} + C$
 (v) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x + 3) + C$
 (vi) $x^2/2 + \operatorname{arctg} x + C$
 (vii) $a^3/3 + a^2/2 + a + C$
 (viii) $\frac{1}{14(4-3x^2)^7} + C$
 (ix) $\frac{1}{4\cos^4 x} + C$
 (x) $\frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{6} + C$
 (xi) $\ln(\sec x) + C$
 (xii) $9\ln(x - 2) + (x^3 + 3x^2 + 12x)/3 + C$
 (xiii) $\frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+15}}{2} - 8\operatorname{arcsen}\left(\frac{1-x}{4}\right) + C$
 (xiv) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x + 3) + C$
 (xv) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$
- (h) $\frac{1}{3}\sec^3 x + c$
 (i) $\frac{1}{6}\sec^6 x - \frac{1}{4}\sec^4 x + c$
 (j) $-\frac{2}{3}(3 + \cos x)^{\frac{3}{2}} + c$
- (xvi) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}((x + 3)/2) + C$
 (xvii) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}((x + 3)/2) + C$
 (xviii) $x - \operatorname{arctg} x + C$
 (xix) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x} + C$
 (xx) $\frac{1}{\ln(3-\operatorname{sen} x)} + C$
 (xxi) $2^{(x^2-1)}/\ln 2 + C$
 (xxii) $\frac{2}{5}(x + 1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} + C$
 (xxiii) $\frac{1}{3}\cos(x^3) - \cos x + C$
 (xxiv) $x/2 - \operatorname{sen}(2x)/4 + C$
 (xxv) $\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$
 (xxvi) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$
 (xxvii) $\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2 + 4} - \frac{8}{3}\sqrt{x^2 + 4} + C$
 (xxviii) $-\operatorname{arcsen}(1 - x/4) + C$
 (xxix) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{x^{-2} - x^2}) + C$
 (xxx) $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$

Algumas dicas.

- (a) Use divisão de polinômios em, por exemplo, (17vi) e (17vii).
 (b) Complete quadrado em, por exemplo, (17xvii) e (17xxviii).
 (c) Multiplique/divida por $\sec x + \operatorname{tg} x$ em (17xxv).
 (d) Mostre que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ e $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Use uma dessas relações em, por exemplo, (17xxiv).
 (e) Use uma relação trigonométrica apropriada em, por exemplo, (17x), (17xi), (17xxiii), (17xxvi) e (17xxx).
- 18) (i) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{sen}(2x) + C$
 (ii) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\ln(3x + 2) + C$
 (iii) $-3\sqrt{1-x^2} + 2\operatorname{arcsen} x + C$
 (iv) $2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$
 (v) $\frac{5}{x+2} + 6\ln(x + 2) + C$
 (vi) $\ln x + \frac{1}{x} + C$
 (vii) $2\operatorname{sen} \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C$
 (viii) $\frac{1}{2}a^2\operatorname{arcsen}(x/a) + x\sqrt{a^2 - x^2} + C$
 (ix) $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - 4/9x^{3/2} + C$
 (x) $\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + C$
 (xi) $\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln(\sec x) + \operatorname{tg} x + C$
 (xii) $\frac{1}{11}\sec^{11} x - \frac{2}{9}\sec^9 x + \frac{1}{7}\sec^7 x + C$
- (xiii) $\frac{1}{2}[x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x] + C$
 (xiv) $x\ln(x^2 + 1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$
 (xv) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 4\ln(x - 1) + C$
 (xvi) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 4\sqrt{2}\operatorname{arctg}((x + 1)/\sqrt{2}) + C$
 (xvii) $x\operatorname{sen}(2x)/4 + \cos(2x) + 2x^2 + C$
 (xviii) $-\operatorname{arcsen}(x/3) - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$
 (xix) $\frac{-\sqrt[3]{(9-x^2)^2}}{27x^3} + C$
 (xx) $\frac{-\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$
 (xxi) $\frac{1}{6}x\sqrt{x^2 - 4} + \frac{2}{3}\ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + C$
 (xxii) $\frac{-\sqrt{(1-x^2)^5}}{5x} + C$
 (xxiii) $\frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + C$
 (xxiv) $\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C$