UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCE
Departamento de Matemática

Apostila MAT099

Ellen
Rogério Carvalho Picanço
Lucy Tiemi Takahashi

Pré-Cálculo.

VIÇOSA
MINAS GERAIS-BRASIL
Julho de 2006

Sumário

Considerações preliminares importantes.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina construída sobre um pedestal, o qual é formado por boa parte da matemática estudada até o ensino médio.

As idéias centrais do Cálculo são fruto de milhares de anos de história da Matemática. E a sua implementação requer apoio, através de um pedestal bem estruturado. Por isso, é indispensável que a pessoa que queira aprender esta disciplina, tenha noções bem fundamentadas sobre:

- a reta real e o plano cartesiano (conjuntos numéricos e operações neles definidas);
- equações de retas, circunferências e parábolas;
- funções.

Como é bastante freqüente que grande número de alunos ou não estudaram ou esqueceram parte dessas noções, tem-se a impressão que o Cálculo é um vilão na vida do estudante que precisa dele. E se esse estudante não se propuser a fazer um esforço suplementar para aprender e/ou recordar as idéias fundamentais, será um candidato sério ao insucesso.

A maior pretensão deste programa é "enfatizar o mínino que todo aluno que quiser aprender Cálculo deve saber".

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Números Racionais

Assumiremos conhecidos o conjunto numérico dos números naturais, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e as operações nestes conjuntos.

Uma fração $\dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ é uma uma razão entre números inteiros. Chamamos o número a de *numerador* e ao número inteiro **não nulo** b de *denominador* da fração.

O conjunto de todas as frações é chamado conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Isto é,

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \text{ e } \mathrm{mdc}(a, b) = 0\},$$

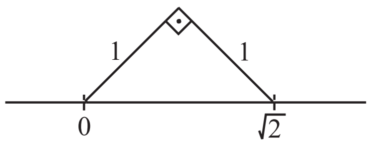
onde $\mathbb{Z}^*$ denota o conjunto dos inteiros excluindo o zero (Em geral, o símbolo * exclui o zero de um conjunto).

$$\boxed{\text{Dois números racionais } \frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d} \text{ são equivalentes (iguais) quando } ad = bc.}$$

Sabemos que uma reta possui infinitos pontos. Definimos o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, como um conjunto numérico no qual seus elementos estão em correspondência biunívoca (um-a-um) com os pontos de uma reta.

desenhar reta com números marcados.
desenhar uma reta com os três pontos marcados.

Construindo um triângulo retângulo com um de seus vértices em 0, e seus catetos unitários, temos:



A hipotenusa do triângulo mede $\sqrt{2}$ e está sobre a reta, ou seja, o número $\sqrt{2}$ pertence à reta r, e conseqüentemente, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Já vimos que $\sqrt{2}$ não é racional. Assim, definimos os números irracionais como sendo o conjunto dos números que são reais e não são racionais, denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. A união dos números racionais e irracionais forma o conjunto dos números reais.

1.1.1 Simplificação de frações

Simplificar uma fração é representar o mesmo número racional por uma outra fração equivalente mais simples (números ou expressões menores). Para simplificar uma fração basta dividir o numerador e o denominador pelo seu máximo divisor comum.

Exemplo 1.1

1. $\dfrac{36}{48} = \dfrac{36 \div 12}{48 \div 12} = \dfrac{3}{4}$
2. $\dfrac{15}{75} = \dfrac{15 \div 15}{60 \div 15} = \dfrac{1}{5}$
3. $\dfrac{63}{81} = \dfrac{63 \div 9}{81 \div 9} = \dfrac{7}{9}$
4. $\dfrac{-21}{27} = \dfrac{-21 \div 3}{27 \div 3} = \dfrac{-7}{9}$

1.1.2 Operações com frações

Adição e subtração

Só é permitido somar ou subtrair frações com mesmo denominador. Quando necessário, devemos reduzir as frações ao mesmo denominador ao trabalhar com essas operações.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \text{ onde } b \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \text{ onde } b, d \neq 0$$

Exemplo 1.2

1. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4.3+2.5}{15}=\dfrac{22}{15}$
2. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{49}=\dfrac{2.7+3.1}{49}=\dfrac{17}{49}$
3. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4.3-2.5}{15}=\dfrac{2}{15}$
4. $\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{49}=\dfrac{2.7-3.1}{49}=\dfrac{11}{49}$

Multiplicação

Multiplica-se os numeradores e os denominadores entre si.

Exemplo 1.3

1. $\dfrac{2}{3}.\dfrac{5}{7}=\dfrac{2.5}{3.7}=\dfrac{10}{21}$
2. $\dfrac{3}{8}.\dfrac{4}{5}=\dfrac{3.4}{8.5}=\dfrac{3}{2.5}=\dfrac{3}{10}$
3. $\dfrac{4}{11}.\dfrac{10}{9}=\dfrac{40}{99}$

Divisão

Multiplica-se a fração do numerador pelo inverso da fração do denominador.

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}.\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$, onde b,c,d $\neq 0$ ou $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}.\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$

Exemplo 1.4

1. $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}=\dfrac{2}{3}\div 4=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3.4}=\dfrac{1}{3.2}=\dfrac{1}{6}$
2. $\dfrac{1}{\frac{4}{5}}=1\div\dfrac{4}{5}=1.\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{4}$

Atenção: Abaixo são listados erros muito comuns. Tente descobrir onde houve falhas e fique atento para não cometê-las:

$$\frac{x+y}{y} = x \qquad ERRADO \qquad \frac{x.y}{y} = x \qquad CERTO$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \qquad ERRADO \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{a.b} \qquad CERTO$$
$$\frac{a-b}{a} = -b \qquad ERRADO \qquad \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \qquad CERTO$$

Exercícios 1.1

1- Efetue e simplifique o resultado, se possível:

a) $\frac{5}{3} + 8$

b) $\frac{7}{5} + \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{24} + \frac{1}{8}$

d) $\frac{\frac{1}{7}}{3} + \frac{\frac{2}{5}}{4}$

e) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8}$

f) $\frac{6}{7} + \frac{10}{\frac{5}{7}}$

g) $\frac{\frac{4}{3}}{6} + \frac{2}{\frac{5}{3}}$

h) $\frac{\frac{9}{4}}{7} - \frac{\frac{2}{5}}{4}$

2- Efetue:

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}}$

b) $\dfrac{\frac{3}{\frac{1}{3}}}{\frac{9}{7}}$

c) $\dfrac{1+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+4$

d) $[(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) \div \frac{3}{2}+\frac{1}{9}] \div \frac{1}{3}$

e) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{3}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}-\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$

3- Use exclusivamente os conceitos de mínimo múltiplo comum para resolver os seguintes desafios:

a) Numa sala de aula, $\frac{2}{3}$ das carteiras estão ocupadas por rapazes e $\frac{1}{2}$ por moças; ainda existem 6 carteiras vazias. Quantas carteiras tem a sala?

b) Um calouro gastou $\frac{2}{7}$ do dinheiro que tinha no bolso para comprar apostilas, $\frac{1}{3}$ para fazer um lanche e ainda sobraram $R\$7,20$. Quanto dinheiro tinha esse estudante?

1.1.3 Expressões Algébricas

As expressões algébricas são expressões (frases matemáticas) que envolvem variáveis.

$$\overbrace{4}^{coeficiente} \quad . \quad \underbrace{x^2y^3}_{parte\ literal}$$

As expressões algébricas formam os monômios, binômios e polinômios.

Definição 1.1 ***Monômio*** *é uma expressão algébrica formal cuja parte literal é um produto de variáveis com expoentes naturais.*

Exemplo 1.5

$3x^2y;\ \frac{1}{4}xy^3z;\ \sqrt{2}xy^2.$

Obs.: $\frac{1}{x}$ não é um monômio pois o expoente de x^{-1} não é natural.

Definição 1.2 ***Polinômio*** *é uma soma formal finita de monômios.*

Exemplo 1.6
$P(x) = x^5 - 2x^3 + 4$
$P(x) = x^3y^2 + 3x^2y - 2x + 5$

Estudaremos sobre os polinômios no próximo capítulo.

Operações com Expressões Algébricas

Adição e multiplicação. Vamos revê-las através de exercícios.

Exercícios 1.2

1- Reduza os termos semelhantes:

a) $5x^3y^2 + 2x^3y^5 - 4xy^3 + 3x^3y^2 - 2x^3y^5 - 4$
b) $\frac{2}{3}x^3 + 4x^2y^3 - \frac{5}{2}x^3y^5 + \frac{3}{4}x^3 - 5x^2y^3 + \frac{3}{2}x^3y^5$

2- Efetue e reduza os termos semelhantes:

a) $3x^2(4xy^3 - 5x^3y)$
b) $(x+2)(x+3)$
c) $(3x-2y)(3x+2y)$
d) $(a+b)^3$

3- Efetue e simplifique o resultado, observando a condição de existência:

a) $\frac{5}{x} + 8x$

b) $\dfrac{x+5}{3}+\dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{1}{(x+3).(x-2)}+\dfrac{1}{x+3}$

d) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x+3}}+\dfrac{\dfrac{x}{3}}{x+2}$

e) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x^2-4}$

f) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}+\dfrac{x^3+8}{(x+1)(x+2)}$

4- Simplifique as expressões:
Obs.:Não se esqueça da condição de existência.

a) $\dfrac{2x^2-8x}{4x}$

b) $\dfrac{x+x^2}{2+2x}$

c) $\dfrac{a^2-1}{a+1}$

d) $\dfrac{t^2-4}{t^2-2t}$

e) $\dfrac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{y+1}{y^2-1}$

g) $\dfrac{x^2+12x+35}{x+7}$

h) $\dfrac{a^2+2a-35}{a+7}$

Produtos Notáveis e Fatoração

Ao operar com expressões algébricas ocorrem com bastante freqüência certos produtos que recebem, por esse motivo, o nome de notáveis. Alguns deles, relacionados em seguida, são de grande utilidade na *fatoração* e em certas *racionalizações*. Você irá utilizá-las bastante no curso de Cálculo, assim procure memorizá-las.

Sejam a e b dois números;

- quadrado de uma soma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- quadrado de uma diferença: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- produto da soma pela diferença: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- cubo da soma: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- cubo da diferença: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

As expressões acima são obtidas aplicando-se as propriedades de soma e multiplicação de polinômios. Observe que não há fórmula para a expressão $a^2 + b^2$, pois ela não pode ser fatorada utilizando números reais.

Uma expressão algébrica se diz **fatorada** se puder ser escrita na forma de um produto. Isto pode ser muito útil para operar com frações algébricas. Essencialmente, a fatoração pode ser aplicada quando:

a) Existe, em uma expressão algébrica, um *fator comum.*

Exemplo 1.7

1- $7xy^3 - x^2y^2 + 8x^4y^3 - x^3y^5$

Como xy^2 é o fator comum a todos os termos da expressão,

$7xy^3 - x^2y^2 + 8x^4y^3 - x^3y^5 = xy^2(7y - x + 8x^3y - x^2y^3)$

2- $6ab^2x - 4a^2bx^2 + 2abx^2 = 2abx(3b - 2ax + x)$

b) Outra expressão que, em geral, pode ser fatorada é a do tipo $ax^2 + bx + c$, que se transforma no produto de dois binômios, $a(x - x_1)(x - x_2)$.
Por exemplo, $x^2 - 2x + 8$ pode ser fatorado como: $(x-4)(x+2)$

Os termos x_1 e x_2 podem ser encontrados resolvendo-se a equação $ax^2 + bx + c = 0$ através da fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo 1.8

1- Fatorar

i) $x^2 - 2x - 15$
Temos que, $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Daí, $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2}$.

Logo, $x_1 = 5$ e $x_2 = -3$.
Então $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

(Multipliquem os parênteses e verifique a igualdade!!!)

ii) $x^6 - 16$
Temos que, $x^6 - 16 = (x^3)^2 - 4^2$.
Daí, $x^6 - 16 = (x^3 + 4)(x^3 - 4)$.

iii) $64a^3 - 27b^3 = (4a)^3 - (3b)^3$
Temos que,
$4a^3 - 27b^3 = (4a)^3 - (3b)^3 = (4a - 3b)(16a^2 + 12ab + 9b^2)$.

c) Estiver presente algum produto notável.

Exemplo 1.9

(a) $4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4(x + 1)^2$

(b) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

(c) $16m^2 + 8m + 1 = (4m + 1)^2$

d) Se puder fazer a reunião dos termos em grupos, fatorar esses grupos e recair em um dos casos anteriores.

Exemplo 1.10

(a) $a^5 - a^3 + a^2 - 1 = a^3(a^2 - 1) + (a^2 - 1) = (a^2 - 1)(a^3 + 1) = (a + 1)(a - 1)(a^3 + 1)$

(b) $mx + ny + my + nx = x(m + n) + y(m + n) = (m + n)(x + y)$

Exercícios 1.3

1- Fatore:

a) $4x^2 - 12x + 9$

b) $x^2 + 2\sqrt{ax} + a$

c) $16x^4 - b^4$

d) $27m^3n^2 + 9m^2n^4 - 18mn^2$

2- Fatore os polinômios:

a) $x^2 - 25$

b) $\frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{4}$

c) $x^2 - 10x + 25$

d) $2x^2 - 12x + 18$

3- Escreva como um produto de fatores do 1° grau os seguintes polinômios:

a) $x^2 - x - 20$

b) $x^2 + 6x - 7$

c) $x^2 + 13x + 30$

d) $-x^2 - 10x - 9$

1.2 Potenciação

A operação de potenciação é definida nos inteiros da seguinte forma. Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, definimos $a^n = a.a.a...a$. Por definição temos ainda $a^0 = 1$. Chamamos a de *base* e n de *expoente*.

Podemos estender a definição para expoentes inteiros fazendo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. No caso de bases racionais a definição é análoga.

Exemplo 1.11

1. $(\frac{7a^4}{2b})^1 = \frac{7a^4}{2b}$

2. $(-\frac{7}{10})^{-1} = -\frac{10}{7}$

3. $(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$

4. $-5^2 = -1.25 = -25$

5. $(-5)^2 = (-5).(-5) = 25$

6. $(-4)^3 = (-4).(-4).(-4) = -64$

7. $(-\frac{4}{5})^{-2} = (-\frac{5}{4})^2 = (-\frac{5}{4}).(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16}$

Propriedades:

Se $a, b \in \mathbb{Q}$ e se $m, n \in \mathbb{Z}$ então valem as seguintes propriedades:

- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n}, a \neq 0.$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
- $(a.b)^n = a^n.b^n$

Exemplo 1.12

1. $(-4xy^3)^2 = (-4xy^3).(-4xy^3) = 16x^2y^6$

2. $\frac{5x^3y}{7xy^2} = 5x^3y \div 7xy^2 = \frac{5}{7}x^2y^{-1} = \frac{5x^2}{7y}$

3. $(2x.\frac{y^2}{3})^3 = 8.x^3.\frac{y^6}{27} = \frac{8x^3y^6}{27}$

4. $(\frac{4x^2}{3b^3})^{-2} = (\frac{3b^3}{4x^2})^2 = \frac{(3b^3)^2}{(4x^2)^2} = \frac{9b^6}{16x^4}$

Exercícios 1.4

1- Sabendo que x é um número inteiro, escreva na forma de uma só potência cada uma das expressões:

a) $10^x.10^{-3}$

b) $\frac{2^x}{2^{-3}}$

c) $3^{x+1}.3^{1-x}$

d) $(10^x)^{-\frac{3}{2}}$

e) $\frac{5^x}{5^{-3x}}$

f) $(x+4)^2.(x+4)^{-3}$

g) $(2^x.4^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

h) $(6^x.6^{\frac{4}{2}})^{\frac{1}{4}}$

i) $5^2.5^0$

j) $2^{\frac{1}{4}}.8^{\frac{1}{4}}$

k) $(-xy^2)^3$

l) $(-2a^2b^2c)^5$

m) $\frac{(-3)^2+3^2}{3^0}$

n) $\dfrac{(-5^2) - 4^2 + (\frac{1}{5})^0}{3^2 + 1}$

2- Calcule:

a) $2^{\frac{1}{2}}$

b) $5^{-\frac{1}{2}}$

c) $3^{\frac{2}{5}}$

d) $\dfrac{3^{-1} + 2}{5^{-1}}$

e) $\dfrac{3^{-4} - 2^{-4}}{3^{-2} - 2^{-2}}$

1.2.1 Radiciação

A operação de radiciação é a inversa da operação de potenciação, ou seja,

$$\boxed{\sqrt[q]{a} = b \Longleftrightarrow b^q = a.}$$

OBS.:

1- Note que se q é um número par então a é um número positivo ou nulo.

2- Dados a, q $\in \mathbb{N}$, $\sqrt[q]{a}$ pode não ser racional, isto é, nem sempre existe $\dfrac{m}{n}$ tal que $\sqrt[q]{a} = \dfrac{m}{n}$. Tais números (não racionais) são chamados números irracionais. Um número irracional tem representação decimal ilimitada e não-periódica.

Centenas de anos antes de Cristo os pitagóricos já sabiam que $\sqrt{2}$ não é um número racional. De fato, suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim, $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ onde a,b $\in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$. Daí,

$$\sqrt{2}b = a \Rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Como $2b^2$ é um número par, para todo $b \in \mathbb{Z}$, temos que a^2 é par, e conseqüêntemente, a é par. Assim, $a = 2p$, onde $p \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$2b^2 = (2p)^2 \quad \Rightarrow \quad 2b^2 = 4p^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2p^2.$$

Daí, b^2 é um número par, e então b é par. Como a e b são pares, o $\mathrm{mdc}(a,b) \neq 1$, o que é um absurdo já que tomamos a e b tais que $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$.

Exemplo 1.13

Números não-racionais: $\sqrt{2} = 1,4142...$, $\pi = 3,14159...$, $e = 2,718...$

Principais propriedades da radiciação:

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ se $a \geq 0$
- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $(\sqrt[a]{x^m})^n = (\sqrt[a]{x^{m.n}})$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Atenção! Pode acontecer de $a.b > 0$ e $a/b > 0$ mesmo a e b não sendo positivos (Como?). Como isso afeta as propriedades de 1 a 4? É possível encontrar exemplos em que essas igualdades não se verificam?

Exemplo 1.14

a) $\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6\div 2]{2^{4\div 2}} = \sqrt[3]{2^2}$

c) $\sqrt{4.25} = \sqrt{4}.\sqrt{25} = 2.5 = 10$

d) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

e) $(\sqrt[7]{2})^5 = \sqrt[7]{2^5}$

f) $(2\sqrt[5]{2^3})^2 = 2^2\sqrt[5]{2^6} = 4\sqrt[5]{2^6} = 8\sqrt[5]{2}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3.2]{a} = \sqrt[6]{a}$

h) $\sqrt[5]{a\sqrt{a^3}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^2.a^3}} = \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}$

Observação: Para introduzir um termo numa raiz eleva-se o número na potência correspondente ao índice da raiz onde ele será introduzido.

Exemplo:

$$x\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x^2(x+x^2)} = \sqrt{x^3+x^4}$$

Exercícios 1.5

1- Sabendo que $x = \sqrt{2}$ então ache o valor para:

$$x^6[x^4(x^2-1)]$$

2- Simplifique:

a) $\sqrt[10]{2^4}$

b) $\sqrt[12]{5^8}$

c) $\sqrt[15]{(a.b)^{10}}$

d) $\sqrt[8]{(\frac{5}{3})^6}$

e) $\sqrt[4]{0,1^2}$

f) $\sqrt{\sqrt{10}}$

g) $\sqrt{\sqrt[5]{2}}$

h) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$

3- Observe:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_m} = \sqrt[n]{a_1}.\sqrt[n]{a_2}.\sqrt[n]{a_3}...\sqrt[n]{a_m}.$$

Conclusão: A raiz de um produto é igual ao produto das raízes, desde que a raiz de cada fator que compõem o produto original exista.

Exemplo: $\sqrt{9.4} = \sqrt{9}.\sqrt{4} = 3.2 = 6$

a) Mostre com um exemplo que, em geral: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

b) Por que, em matemática, um exemplo não é suficiente para mostrar uma afirmativa, mas um contra-exemplo basta para não validá-la? Discuta com seu seu tutor. (Será importante em todas as disciplinas de matemática que você irá cursar.)

4- Quanto vale:

a) $\sqrt{2^4.3^2}$

b) $\sqrt{3^3.4^3}$

c) $3\sqrt{8}.6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{(-4).(-16)}$

Racionalização de denominadores

Muitos procedimentos algébricos (nos cursos de cálculo) tornam-se mais simples quando no denominador de uma fração não aparecem radicais. Racionalizar o denominador consiste em eliminar os radicais do denominador.

<u>Primeiro caso</u>: No denominador aparece somente um termo com radical. Neste caso efetuamos uma multiplicação por um fator conveniente de forma a eliminar o radical.

i. $\dfrac{3}{2\sqrt{7}} = \dfrac{3}{2\sqrt{7}}.\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2.7} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$

ii. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

<u>Segundo caso</u>: O denominador é a soma de dois termos, contendo ao menos um deles um radical.

Sejam a e b dois números reais. Os números $(a+b)$ e $(a-b)$ são chamados *conjugados*. Usando esse fato e o fato de que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Verifique!!), podemos racionalizar denominadores de frações em que aparecem raízes quadradas. Veja os exemplos seguintes:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(-2)} = -\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

2) $\dfrac{3}{1+\sqrt{5}} = ... = -3\dfrac{(1-\sqrt{5})}{4}$

3) $\dfrac{25}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = ... = 5(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

4) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} = \dfrac{2[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]} =$

$... = \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{6}$

Esses exemplos permitem observar que se no denominador de uma fração aparece uma soma ou uma diferença de raízes quadradas, então o conjugado do denominador é o fator racionalizante.

Uma outra propriedade pemite associar raízes com potência de números racionais.

$$\boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}, \text{ sendo } q \geq 2.}$$

Exemplo 1.15

1. $(x^2-7)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{(x^2-7)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-7)^2}}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{2-y}}} = \dfrac{1}{(\dfrac{7+x}{2-y})^{\frac{1}{3}}} = (\dfrac{7+x}{2-y})^{-\frac{1}{3}} = (\dfrac{2-y}{7+x})^{\frac{1}{3}}$

Atenção: Abaixo são listados erros muito comuns. Tente descobrir onde houve falhas e fique atento para não cometê-las:

$x\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x^2+x^3}$	*ERRADO*	$x\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x^2(x+x^2)} = \sqrt{x^3+x^4}$	*CERTO*
$\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$	*ERRADO*	$\sqrt{x.y} = \sqrt{x}.\sqrt{y}$, se x ≥ 0 e y ≥ 0	*CERTO*
$x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x^3}$	*ERRADO*	$\sqrt{x+y} = (x+y)^{\frac{1}{2}}$	*CERTO*
		$x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$	*CERTO*

Exercícios 1.6

1- Faça o produto dos fatores abaixo para verificar que:

- O fator racionalizante de $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ é $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$
- O fator racionalizante de $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ é $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}$

Então, racionalize:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}-\sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{2}$

d) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{4}$

2- Racionalize:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{3^2}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{10^3}}$

f) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Capítulo 2

Polinômios

2.1 Definição

Dados um número natural n e os números complexos $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, ...,\ a_1$ e a_0, denomina-se **função polinomial** ou **polinômio** em $\mathbb{C}$ a função definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

Em que:

$$\begin{cases} a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 \text{ são números complexos chamados } \textbf{coeficientes}. \\ x \in \mathbb{C} \text{ é a variável.} \end{cases}$$

Se $a_n \neq 0$, o espoente máximo n é dito **grau** do polinômio e indicamos $gr(P) = n$.

Exemplo 2.1

1) $P(x) = 7$ ou $P(x) = 7.x^0$ é um polinômio constante, isto é, $gr(P) = 0$.

2) $P(x) = 2x - 1$ é um polinômio do 1° grau, isto é, $gr(P) = 1$.

3) $P(x) = \sqrt{3}x^5 + ix^4$ é um polinômio do 5° grau, isto é, $gr(P) = 5$.

4) $P(x) = 0$, não se define o grau do polinômio.

2.2 Valor Numérico

O valor numérico de um polinômio $P(x)$, para $x = a$, é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Exemplo 2.2

Se $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, o valor numérico de $P(x)$, para $x = 2$,é:

$$\begin{gathered} P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1 \\ P(2) = 2^3 + 2.2^2 - 2 - 1 \\ P(2) = 8 + 8 - 2 - 1 \\ P(2) = 13 \end{gathered}$$

Observações:

1) O valor numérico de $P(x)$, para $x = 2$, é a imagem do 2 pela função polinomial $P(x)$.

colocar o diagrama levando 2 em 13.

2) Se $P(a) = 0$, o número a é denominado rais ou zero de P(x).

$$\boxed{a \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

No polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, temos $P(2) = 0$ (Verifique!); logo, 2 é raiz ou zero do polinômio.

Exercícios 2.1

01- Determine o valor numérico dos polinômios abaixo para $x = a$:

a) $P(x) = x^2 - 3x + 5$, *para* $a = 1$;

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$, *para* $a = 2$;

c) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 4$, *para* $a = 3$;

d) $P(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1$, *para* $a = 0$;

e) $P(x) = x^2 - 2x + 1$, *para* $a = 1$.

2.3 Divisão de polinômios

Efetuar a divisão de um polinômio $P(x)$ por outro polinômio $D(x)$ não nulo, significa determinar um único par de polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ que satisfazem às condições:

1) $P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$;

2) $grR(x) < grD(x)$.

Notas:

1) Se $R(x) = 0$, então dizemos que $P(x)$ é divisível por $D(x)$.

2) Não se esqueça que o grau do resto é sempre menor que o grau do divisor (esta condição é necessária para garantir a unicidade).

O algorítmo da divisão de polinômios será revisto na forma de exercícios.

Exercícios 2.2

01- Efetue:

a) $(27x^3y^2z^5) \div (9xyz)$
b) $(5x^3y^3z^3) \div (9x^2y^2z^2)$
c) $(6x^3 + 13x^2 + 18x + 8) \div (2x^2 + 3x + 4)$
d) $(x^4 - 1) \div (x - 1)$
e) $6(x^2 - 5x + 8) \div (x - 3)$
f) $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \div (x + 1)$

02- Determine o quociente e resto da divisão de $f(x) = 2x^3+x^2-x+2$ por $g(x) = x^2+3x+1$.

03- Ache $Q(x)$ e $R(x)$ na divisão de $A(x) = x^4 - 1$ por $B(x) = x + 1$.

2.4 Divisão de um polinômio por um binômio $(x - a)$

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $(x - a)$, temos:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} r & Q(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x-a)Q(x) + r$$

Fazendo-se $x = a$, vem:
$P(a) = (a - a)Q(a) + r$

$\boxed{P(a) = r}$

Note que $x = a$ é a raiz do divisor.

Do exposto podemos enunciar o **Teorema do resto**:

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pela diferença $(x - a)$ é igual a $P(a)$.

Exemplo 2.3

1) Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^2 + 4x + 5$ pelo binômio $B(x) = x - 1$.

Resolução: Efetuando a divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x+5 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+x} & x+5 \\ 5x+5 & \\ \underline{-5x+5} & \\ 10 & \end{array}$$

Logo, $R(x) = 10$.

A raiz do divisor $B(x)$ é: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Calcule $P(x)$ para $x = 1$: $\quad P(1) = 1^2 + 4 + 5$

$P(1) = 10$

Observe que $R(x) = P(1) = 10$.

2) Determinar o valor de p para que o polinômio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $x - 2$.

Resolução: Se $P(x)$ é divisível por $x - 2$, então $P(2) = 0$

$$\begin{aligned} P(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad & 2.8 + 5.4 - 2p + 2 = 0 \\ & 16 + 20 - 2p + 2 = 0 \\ & p = 19 \end{aligned}$$

Exercícios 2.3

01- Determine o resto da divisão de:

a) $x^2 + x + 2$ *por* $x - 1$

b) $5x^3 + 2x^2 - x + 4$ *por* x

c) $x^7 - x^6$ *por* $x + 1$

d) $x^6 - x^4 + x^2$ *por* $x + 2$

02- Determime a de modo que:

a) $x^3 + 2ax^2 - (a + 1)x$ seja divisível por $(x - 1)$;

b) $(a + 3)x^2 - x + 2a$ seja divisível por $x + 2$.

03- Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^8 - 5x^3 + x^2 - 1$ por $x + \frac{1}{2}$.

04- Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 12$ é divisível por $(x + 3)$.

2.5 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Observe a seguinte divisão:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 5x^2 + x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-3x^3 + 6x^2 \phantom{{}+x-2} & 3x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1}
x^2 + \ x - 2 & \\
-x^2 + 2x \phantom{{}-2} & \\ \cline{1-1}
3x - 2 & \\
-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

Neste item vamos utilizar um dispositivo muito simples e prático para efetuar a divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $(ax + b)$. É o chamado dispositivo de **Briot-Ruffini**.

Vejamos o roteiro desse dispositivo.

1°) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo (ordenadamente) no seguinte dispositivo.

$$
\begin{array}{c|c}
\overbrace{\quad 2 \quad}^{\text{raiz do divisor}} & \overbrace{3 \qquad -5 \qquad 1 \qquad -2}^{\text{coeficientes do dividendo}} \\ \hline
 &
\end{array}
$$

Observação: Se o polinômio $P(x)$ não tivesse o termo x^2, por exemplo, o coeficiente desse termo seria igual a 0 (zero).

2°) Repetimos (abaixamos) o primeiro coeficiente do dividendo.

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & \downarrow & & & \\
 & 3 & & &
\end{array}
$$

3°) Multiplicamos a raiz do divisor pelo coeficiente repetido e somamos o produto com o segundo coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & & \downarrow & & \\
 & 3 & 1 & &
\end{array}
$$

$2.3 - 5 = 1$

4°) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2° coeficiente e somamos o produto com o 3° coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & & \downarrow & \\ & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

2.1+1=3

5°) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão; os números que ficam à esquerda deste são os coeficientes do quociente.

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 3 \quad -5 \quad 1 & -2 \\ \hline & \underbrace{3 \quad\quad 1 \quad\quad 3}_{\text{coeficientes do quociente}} & \underbrace{4}_{\text{resto}} \end{array}$$

Logo, $Q(x) = 3x^2 + \ x + 3$ e $R(x) = 4$.

Exemplo 2.4

1) Determinar o quociente e o resto da divisão de $x^6 - 1$ por $x + 1$.

   Resolução: Utilizando-se o dispositivo de Briot-Ruffini, vem:

$$\begin{array}{c|ccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

   Resposta: $Q(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ *e* $R(x) = 0$.

2) Determinar o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 5x^2 - 4x + 2$ por $(3x - 1)$.

   Resolução:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{3} & 5 & -4 & 2 \\ \hline & 5 & -\frac{7}{3} & \frac{11}{9} \end{array}$$

Observe que o coeficiente de x no binômio não é igual a 1; fizemos, então a divisão de $P(x)$ por $(x - \frac{1}{3})$ e para termos os coeficientes de $Q(x)$ devemos dividir os coeficientes obtidos no dispositivo prático por 3.

Resposta: $Q(x) = \frac{5}{3}x - \frac{7}{9}$ e $R(x) = \frac{11}{9}$.

Exercícios 2.4

01- Nos esquemas abaixo, foi aplicado o dispositivo prático de Briot-Ruffini; calcule o valor dos elementos desconhecidos em cada um deles:

a) $\begin{array}{c|cccc} 2 & a & b & c & d \\ \hline & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{c|cccc} 2 & a & b & c & d \\ \hline & 4 & -2 & -1 & 0 \end{array}$

02- Ache o quociente e o resto da divisão de:

a) $P(x) = x^6 - x^4$ *por* $x - 1$

b) $P(x) = -2x^7 + x^3 + x$ *por* $x + 2$

03- Aplicando o dispositivo prático de Briot- Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ *por* $(x - 2)$

b) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 1$ *por* $(x - 1)$

c) $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$ *por* $(x + 3)$

d) $P(x) = 4x^5 - 5x^4 + 1$ *por* $(x - 1)$

e) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ *por* $(2x - 1)$

f) $P(x) = x^2 - 2x + 1$ *por* $(2x - 3)$

2.6 Equações polinomiais

Denomina-se equação polinomial ou equação algébrica de grau n, na variável $x \in \mathbb{C}$, toda equação que pode ser reduzida à forma:

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0 = 0}$$

Em que: $\begin{cases} a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 \text{ são números chamados coeficientes;} \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exemplo 2.5

- $2x - 1$ é uma equação algébrica do 1° grau.
- $5x^2 + x - 3 = 0$ é uma equação algébrica do 2° grau.
- $\sqrt{2}x^5 + ix = 0$ é uma equação algébrica do 5° grau.

Denomina-se raiz ou zero de uma equação polinomial $P(x) = 0$ todo número complexo α tal que $P(\alpha) = 0$.

2.6.1 Conjunto solução ou conjunto verdade

É o conjunto formado por todas as raízes da equação algébrica.
O conjunto solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ é o conjunto $S = \{2, 3\}$.

Exemplo 2.6

1) Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

   Resolução: $x^3 - 5x^2 + 6x \Rightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x(x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $x = 3$ *ou* $x = 2$

   Resposta: $S = \{0, 2, 3\}$

2) Resolver a equação $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

   Resolução: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0$
   Logo, $x + 1 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$, ou seja, $x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

   Resposta: $S = \{-2, -1, 2\}$

Observe que nem todo polinômio possui raízes reais. Por exemplo, $x^2 + 1 = 0$ não possui raízes reais. Neste caso, dizemos que $x^2 + 1$ é um polinômio irredutível. Um fato importante em Álgebra é que alguns polinômios $P(x)$ podem ser decompostos em fatores irredutíveis.

Propriedade: Toda equação algébrica de grau n possui **até** n raízes reais.

Exemplo 2.7

1) A equação $x^3 - x = 0$ possui 3 raízes a saber: $x = 0, x = 1, x = -1$.
Dizemos então que o conjunto verdade ou conjunto solução da equação dada é $S = \{-1, 0, 1\}$.

2) A equação $x^3 + x = 0$ possui somente uma raiz real, $x = 0$.

Exercícios 2.5

01- Resolva as equações:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

02- Determine o conjunto solução das equações:

a) $x^3 + x = 0$

b) $x^3 + x^2 + x = 0$

c) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

2.7 Relações de Girard

Neste item vamos mostrar as relações existentes entre os coeficientes de uma equação algébrica e as suas raízes.

Vejamos alguns casos:

1° **caso:** Equação do 2° grau

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad & ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \\ \text{(com } a \neq 0) \quad\quad & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \\ & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}}$$

2° **caso:** Equação do 3° grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

$$(\text{com } a \neq 0) \qquad x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{c}{a} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{d}{a} \end{array}}$$

Para os caso geral de uma equação algébrica de grau $n > 3$, a demonstração é análoga às anteriores.

Se $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ é uma equação algébrica de grau n, $n \geq 1$ com $a_n \neq 0$ e de raízes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n$, temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_1\alpha_2\ ...\ \ \alpha_n = -\dfrac{a_0}{a_n} \end{array}}$$

Para a resolução de uma equação algébrica, utilizando as relações de Girard, precisamos de alguns dados auxiliares a respeito das raízes da equação, pois apesar de termos n equações a n incógnitas, ao resolver o sistema formado por essas equações, recaímos na equação de grau n, dada inicialmente.

Exemplo 2.8

1- Sejam $a,\ b$ e c as raízes da equação polinomial $x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$. Calcule:

a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

b) $a^2 + b^2 + c^2$

Resolução: a) Utilizando as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ ab + ac + bc = -4 \\ abc = -1 \end{cases}$$

Logo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{-4}{-1} = 4$$

b) Elevendo ao quadrado a expressão $(a + b + c)$, temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

$2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-4)$

$a^2 + b^2 + c^2 = 12$

Exercícios 2.6

01- Escreva as relações de Girard para cada equação a seguir:

a) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $2x^3 - 6x^2 + 5x - 8 = 0$

d) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 7 = 0$

02- Dada a equção polinomial $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, de raízes $a,\ b,\ c$, calcule o valor de :

a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}$

b) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

c) $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab}$

d) $a^2 + b^2 + c^2$

03- Ache o conjunto solução da equação $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é -1.

2.8 Raízes Racionais

Neste item, estudaremos uma propriedade que nos permitirá fazer uma previsão sobre as possíveis raízes racionais de uma equação algébrica.

Propriedade:

> Se a fração racional irredutível $\dfrac{p}{q}$ for raiz da equação algébrica de grau n e de coeficientes inteiros,
>
> $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0,$$
>
> então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n.

Exemplo 2.9

1- Determine as raízes reais da equação $x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.
Resolução: Colocando x em evidência, temos:

$x(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3) = 0$

Portanto, uma raiz é $x = 0$ e as outras raízes são soluções da equação

$1x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$

Usando o resultado anterior, como $a_0 = -3$ e $a_n = 1$, temos $p = \pm 1$ ou $p = \pm 3$ e $q = \pm 1$.

Assim, as possíveis raízes da equação estão no conjunto $\{-3, -1, 1, 3\}$.

Fazendo a verificação, encontramos a raízes -3 e 1.

As raízes racionais da equação são $\{-3, 0, 1\}$. Portanto a equação pode ser colocada na forma fatorada $x(x+3)(x-1)Q(x) = 0$.

Aplicando-se Briot-Ruffini, temos:

-3	1	2	-2	2	-3
1	1	-1	1	-1	0
	1	0	1	0	

Assim, $Q(x) = x^2 + 1$, que não possui raízes reais.

Observação: O Teorema visto acima não garante a existência de raízes racionais mas, no caso delas existirem, indica uma forma de obtê-las. Por exemplo, a equação algébrica de coeficientes inteiros $x^2 - 2x - 1 = 0$ não possui raízes racionais.

Exercícios 2.7

01- Resolva as equações:

a) $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

b) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$

d) $x(x-4)^2 + 10x(x-2) - 8 = 0$

02- Determine o conjunto solução da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x = 0$.

03- Resolva a equação $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$.

04- Ache o conjunto solução da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$.

05- Determine as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$.

06- Determine o conjunto solução da equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Capítulo 3

Os Números Reais

A maior parte das quantidades que estudamos, tais como comprimento, área, volume, posição, tempo e velocidade apresenta uma variação "contínua". O conjunto numérico que representa esta continuidade é o conjunto dos números reais e, neste sentido, o Cálculo Diferencial e Integral está baseado nos números reais.

O conjunto dos números reais contém os inteiros, os racionais e os irracionais. Como já vimos,há uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta.

3.1 Valor Absoluto ou módulo de um Número Real

Dado um número real x, o **módulo (ou valor absoluto)** de x, que se indica por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Então:

- se x é positivo ou zero, $|x|$ é igual a x. $|3| = 3$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$,$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|20| = 20$
- se x é negativo, $|x|$ é igual a $-x$. $|-3| = -(-3) = 3$, $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Da definição de dos exemplos, vemos que:

$\boxed{\text{O } \textbf{módulo} \text{ de um número real nunca é negativo.}}$

Geometricamente, o módulo de um número real x é igual à distância do ponto que representa, na reta real, o número x ao ponto 0 de origem, independentemente de suas posições relativas.
Assim:

- a proposição $|x| < a$ (sendo $a > 0$) significa que a distância entre x e a origem é menor que a, isto é, x deve estar entre $-a$ e a na reta real.

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

- a proposição $|x| > a$ (com $a < 0$) significa que a distância entre x e a origem é maior que a, isto é, x deve estar à direita de a ou à esquerda de $-a$ na reta real.

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$$

Exercícios 3.1

01- Discuta com seu tutor se as questões abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) $|a|$ é sempre positivo.

b) $|a|$ é sempre negativo.

c) $|a|$ pode ser nulo.

d) $|a| = a$ para todo a real.

e) $|abc| = |a||b||c|$ para quaisquer $a,\ b,\ c$ reais.

f) $|ab| < |a||b|$ para quaisquer $a,\ b$ reais.

g) $|a + b| = |a| + |b|$ para quaisquer $a,\ b$ reais.

h) $|a^2| = |a|^2 = a^2$ para todo a real.

i) $|(-2) + c| = 2 + |c|$ para todo $c \leq 0$.

j) $|a - b| \leq |a| - |b|$ para quaisquer $a,\ b$ reais.

02) Elimine o símbolo de valor absoluto:

a) $(-5).|3 - 6|$

b) $\dfrac{|-6|}{(-2)}$

c) $|-7|+|4|$

d) $\dfrac{5}{|-2|}$

e) $|-1|+|-9|$

f) $|4x|$

g) $|2^x|$

h) $|3+x|$ *se* $x<-3$

i) $|5-x|$ *se* $x<5$

03- De acordo com a definição, calcule:

a) $|3-5|$

b) $|-3+5|$

c) $|-3-5|$

d) $|-1|+|-6|$

e) $|-3-5|+|5|$

f) $|-8|+|3-1|$

g) $12+|-8|-|-1-3|$

h) $|-|-5||$

i) $||-2|-|-10||$

04- Aplicando a definição,determine:

a) $|4x+1|$ quando $x=-1$

b) $|5-2x|$ quando $x=1$

c) $|x^2-3x+1|-|x^3+x|$ quando $x=-2$

05- Considere, em $\mathbb{R}$, a expressão $2x-|x|$. Determine o valor numérico desta expressão para:

a) $x=-4$

b) $x=10$

06- Calcule:

a) $|x-3|+|x-1|$, *com* $x>3$

b) $|x-4|-|x-6|$, *com* $x<4$

3.2 Intervalos de Números Reais

Intervalos são subconjuntos de números reais como nos casos descritos abaixo. Pode-se fazer uma representação gráfica desses conjuntos.

Notação	Definição	Gráfico
(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$	
$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} : a\leq x<b\}$	
$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$	
$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} : a<x\leq b\}$	
(a,∞)	$\{x\in\mathbb{R} : x>a\}$	
$[a,\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} : x\geq a\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x\in\mathbb{R} : x<b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x\in\mathbb{R} : x\leq b\}$	
$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

Terminar a tabela.

3.3 Equações e Inequações Modulares

Resolver uma equação é encontrar o valor (ou valores) da variável que tornem a sentença verdadeira.

Exemplo 3.1

1- Resolva $|2x+1| = 3$

Resolução: Por definição, $|2x+1| = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x+1=3 \\ ou \\ 2x+1=-3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=1 \\ ou \\ x=-2 \end{array} \right.$

Para resolver uma **inequação**, é necessário determinar todos os valores da variável (ou variáveis) que tornem a sentença verdadeira.

Exercícios 3.2

01- Resolva as equações:

a) $|15x+3| = 7$

b) $x + |3-4x| = 6$

c) $x - |10-2x| = 11$

d) $|x^2-1| = 8$

e) $|3-x^2| + |2x| = 0$

f) $\sqrt{(x-5)^2} + x = 10$

02- Resolva as inequações:
Obs.: Use intervalos para representar o resultado, quando possível.

a) $|x+3| < 1$

b) $|x+2| \geq 3$

c) $|2-x| + |x-3| < 7$

d) $x - |10-2x| \geq 2$

e) $x|x-3| < 2$

f) $|x||x-5| > -4$

03- Resolva as inequações:

a) $\dfrac{x+2}{2x-1} \geq \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{2x+3}{5x-1} < \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{5x-1}{x+2} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{3}{x-1} < 1$

e) $\dfrac{x+2}{2x+3} > \dfrac{5}{6}$

04- Lembre-se que se $a \geq 0$, então é verdade que: $|a| \leq x$ implica que $-a < x < a$. Use este fato para achar os valores de x tais que:(Este tipo de inequação aparece muitas vezes no curso de cálculo.)

a) $|x-1| < 2$

b) $|x| \leq 1$

c) $|x-4| \leq 3$

d) $|1-x| \leq 1$

e) $|x| \leq -4$

05- Use somente a definição de módulo para achar x tal que $|x+1| > 2$.

Capítulo 4

Função

Uma função $f : A \to B$ é composta por três partes. Um conjunto não vazio A chamado **domínio** de f, um conjunto B chamado **contradomínio** e uma **regra** de correspondência entre os dois conjuntos A e B, que associa cada elemento de A, $a \in A$, um, **e somente um**, elemento em B, $f(a) = b \in B$. Note que, pela definição, podem existir elementos de B que não estejam associados a nenhum elemento de A.

O conjunto dos elementos $b \in B$ para os quais existem associados elementos do domínio é chamado **imagem** de f, ou seja, $\mathbf{Im}(f) = \{b \in B; \exists\ a \in A,\ f(a) = b\}$. Assim, a imagem de uma função é um subconjunto de seu contradomínio.

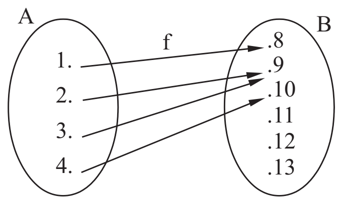


Figura 4.1: Diagrama de Venn

Exemplo 4.1

1. A área de circunferência depende somente de seu raio através da equação $A = \pi r^2$.

2. O número de bactérias n presentes em uma cultura após uma hora de observação depende da quantidade N de bactérias presentes inicialmente na cultura; diz-se então que n é uma função de N.

4.1 Representações de uma função

Temos duas formas bem comuns de se representar uma função.

4.1.1 Tabela

Utilizamos a tabela, em geral, quando o domínio é finito e "pequeno".

Exemplo 4.2

1. Uma pequena fábrica pode produzir de 0 a 4 unidades diárias de um artigo. O custo operaconal diário da fábrica depende de quantas unidades são produzidas de acordo com a tabela abaixo.

	Custo Oreracional da Fábrica				
x(n^o de unidades)	0	1	2	3	4
y(custo diário)	500	700	900	1100	1300

Esta tabela é equivalente aos pontos $(0, 500); (1, 700); (2, 900); (3, 1100); (4, 1300)$. Podemos "olhar"para esta tabela como uma função $f : A \to \mathbb{N}$, onde $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A imagem de f é o conjunto $\textbf{Im}(f) \subset \mathbb{N}$ dado por $\textbf{Im}(f)=\{500, 700, 900, 1100, 1300\}$.

4.1.2 Regra

Exemplo 4.3

1. Podemos expressar a função custo operacional diário $f : A \to \mathbb{N}$ do exemplo anterior pela regra $f(x) = 200x + 500$.

4.1.3 Gráfico

Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela regra $g(x) = 200x + 500$. Note que, embora a regra seja a mesma do exemplo anterior, temos uma outra função pois agora o domínio (e o contradomínio) são diferentes (lembre que uma função é composta por três partes e não só pela regra). Não poderíamos explicitar esta função g por uma tabela, uma vez que seu domínio é infinito. Podemos representar seus pontos no plano cartesiano. O gráfico de g é uma reta.

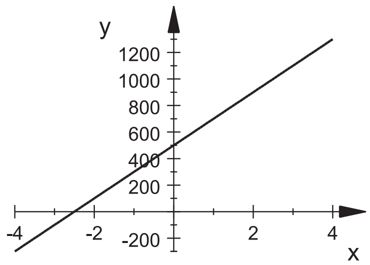


Figura 4.2:

Nem toda tabela, gráfico ou equação representam uma função.

Exemplo 4.4

1. Se um mesmo elemento de A estiver associado a dois elementos distintos de B, ou se tivermos um elemento de A que não esteja associado a elementos de B então não temos uma função.

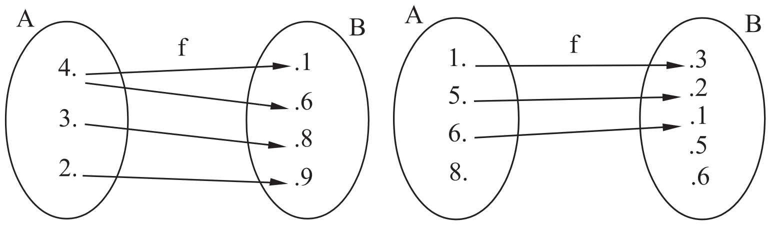


Figura 4.3:

Se uma função f é definida por uma expresão sem especificação do seu domínio, vamos considerar como domínio de f todos os números reais para os quais a expressão assume um valor real, isto é, o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}$. Este domínio é chamado **domínio natural** de f.

2. Seja $h(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ Esta função não está definida para 1 e 3. Logo, $D(h) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

O cancelamento de fatores comuns no numerador e no denominador de uma expressão podem alterar o domínio natural de uma função.

3. Se $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, então $D(h) = \mathbb{R} - \{2\}$. Se escrevermos $h(x) = x + 2$ temos de ter o cuidado de conservar o domínio original da função (senão estamos criando uma nova função, lembre que o domínio é uma das partes que definem uma função), isto é, $h(x) = x + 2$, com $x \neq 2$.

Exercícios 4.1

1. Determine o domínio natural das seguintes funções:

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x}$

   b) $f(x) = \dfrac{(x^2+3x-4)(x^2-9)}{(x^2+x-12)(x+3)}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x} + \sqrt{x^2-1} + x^3}{\sqrt{1-x}}$

2. Sendo $f(x) = x^2 - x$, ache:

   a) $f(2)$

   b) $f(\frac{1}{2})$

   c) $f(t+1)$

   d) $f(x+h) - f(x)$

   e) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$

3. Faça o mesmo para:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

4.2 Gráfico de Funções Reais

4.2.1 Sistema de Coordenadas Retangulares

O conjunto formado por todos os pares ordenados de reais é chamado de espaço bidimensional e indicado por $\mathbb{R}^2$. Isto é, $\mathbb{R}^2 = \{(a,b)|a, b \in \mathbb{R}\}$.

Um sistema de coordenadas retangulares é uma correspondência entre pares ordenados (a,b) e pontos e um plano. **Este sistema é necessário para descrever geometricamente a dependência ou relação entre duas quantidades.**

O plano é chamado plano coordenado ou plano xy. Então um elemento (a,b) do $\mathbb{R}^2$ pode ser representado no plano cartesiano, por um ponto P de abcissa a e coordenada b.

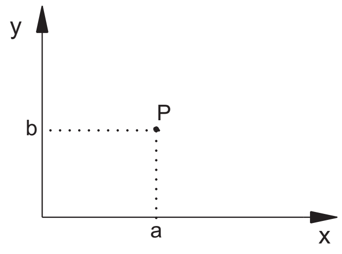


Figura 4.4:

Definição 4.1 *Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ do plano cartesiano, onde $x \in D(f)$, isto é, $G_f = \{(x, f(x))|x \in D(f)\}$.*

Dada uma curva c no plano xy é possível determinar se ela representa o gráfico de função: <u>quando qualquer reta vertical corta um ponto.</u> Isto porque se f é uma função, um ponto do seu domínio pode ter somente uma imagem.

Através do gráfico de f também podemos determinar o **domínio** e a **imagem** de f. (Embora não seja possível determinar o contradomínio da função.)

Funções Reais mais comuns

4.3 Função Constante

O tipo mais simples de função é aquela que associa o mesmo valor a todo ponto do seu domínio. Isto é, uma função do tipo $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. São chamadas funções constantes. Por exemplo, $f(x) = 3$; então $f(1) = 3$, $f(0) = 3$, $f(-3) = 3$, etc. O domínio natural da função constante é o conjunto $\mathbb{R}$ e $\mathbf{Im}(f) = \{k\}$.

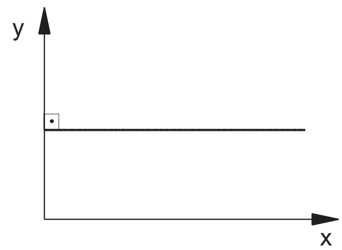


Figura 4.5:

4.4 Função do 1º Grau ou Função Linear

É toda função do tipo $f(x) = ax + b, a \neq 0$.

• $a = \text{tg}\theta$ é o coeficiente angular da reta ou declividade da reta.

• Dado dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes ao gráfico de f, isto é, que tornem a equação $y = ax + b$ verdadeira, então $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

• $(0, b)$ é o ponto onde a reta corta o eixo do y.

• $D(f) = \mathbb{R}$ e $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}$.

• $f(x) = x$ é chamada função identidade.

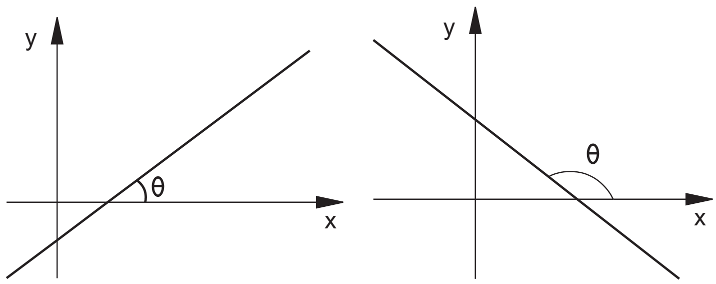


Figura 4.6:

Note que :

► $a > 0 \Rightarrow \text{tg}\theta > 0$. Logo, θ é agudo ($< 90^o$) e a reta é crescente.
► $a < 0 \Rightarrow \text{tg}\theta < 0$. Logo, θ é obtuso ($> 90^o$) e a reta é decrescente.
► $a = 0 \Rightarrow \text{tg}\theta = 0$. Logo, a reta é horizontal. (Função Constante)

Exemplo 4.5

$f(x) = 2x - 1$

Como o gráfico é uma reta, para traçá-lo é suficiente marcar apenas dois pontos.

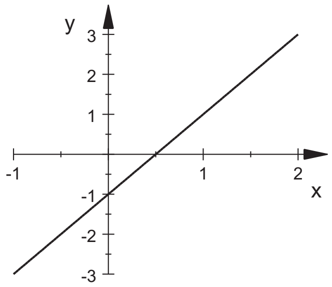


Figura 4.7:

4.5 Função Quadrática

É a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

• O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y.

• A interseção da parábola com o eixo x define os zeros da função.

• A interseção do eixo de simetria com a parábola é um ponto chamado de vértice (v) onde $v = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

• A interseção da parábola com o eixo $y(x = 0)$ é o ponto $(0, c)$.

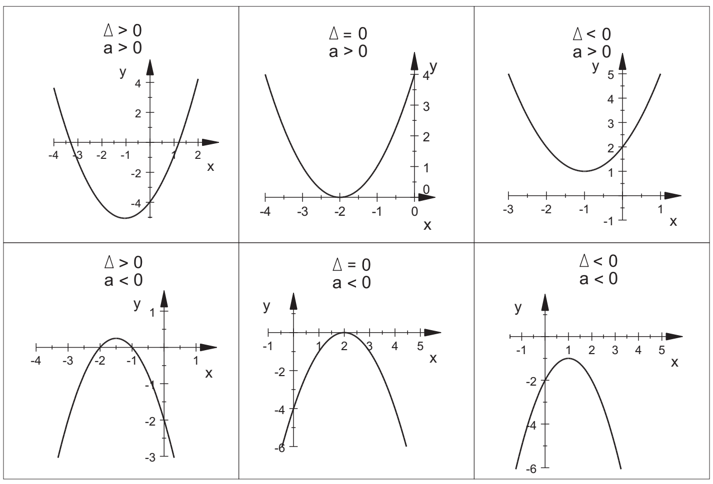


Figura 4.8:

Exemplo 4.6

$h(x) = x^2 - 2$

$\boldsymbol{D}(f) = \mathbb{R}$
$\boldsymbol{Im}(f) : [-2; +\infty)$

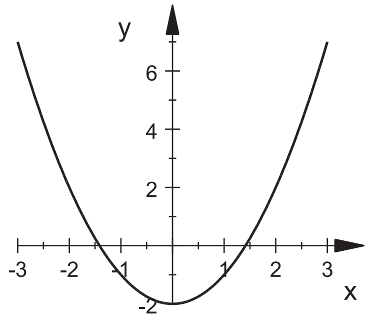


Figura 4.9:

Dicas para construção dos gráficos

1º▶ Determine o vértice da parábola, que é o par ordenado $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$

2º▶ Trace o eixo de simetria, que uma reta vertical passando pelo vértice; esse eixo facilita a localização de pontos do gráfico pois as imagens de valores simétricos a $\dfrac{-b}{2a}$ pertencem ao gráfico

3º▶ Examine o valor de a; se $a > 0$, ele está voltado para cima e se $a < 0$ ele está voltado para baixo.

Vale dizer:
• $a > 0 \Rightarrow$ vértice é o extremo inferior da função (*mínimo*).
• $a < 0 \Rightarrow$ vértice é o extremo superior da função (*máximo*).

4º▶ Faça uma tabela com alguns valores atribuídos a x e suas respectivas imagens. Os valores de **x** devem ser escolhidos a partir do valor de $\dfrac{-b}{2a}$.

Exemplo 4.7

$f(x) = y = -x^2 + 4x$

1º▶ vértice: $(2, 4)$

2º▶ eixo de simetria: $x = 2$

3º▶ $a = -1 < 0$: voltada para baixo

4º▶

x	y
2	4
1	3
3	3
0	0
4	0

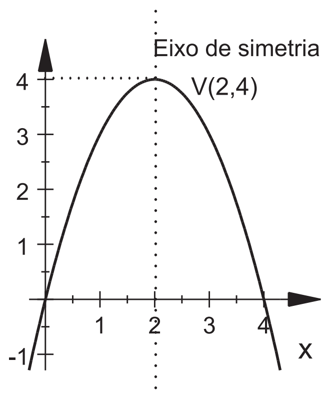


Figura 4.10:

4.6 Função Cúbica

É uma função definida por $ax^3 + bx^2 + cx + d$, sendo $a \neq 0$

Exemplo 4.8

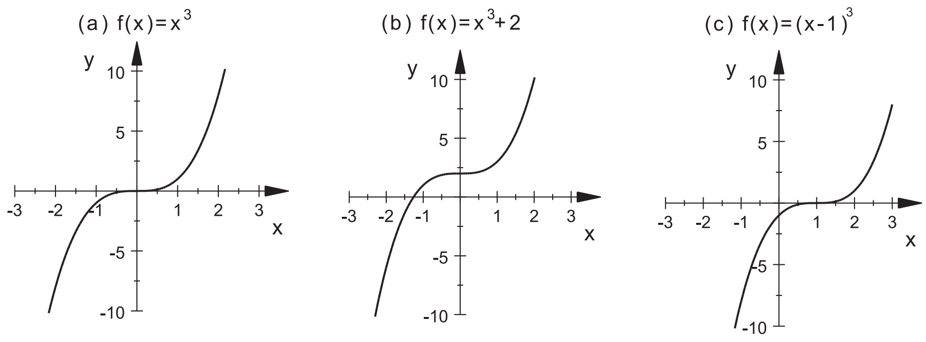


Figura 4.11:

4.7 Função Definida por Partes

As funções também podem ser definidas por expressões distintas em partes diferentes do seu domínio.

Exemplo 4.9

1. $f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{se} \quad 0 < x \leq 4 \\ -2x + 12, & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$

   $\boldsymbol{D}(f) = \mathbb{R}$
   $\boldsymbol{Im}(f) : (-\infty; 4]$

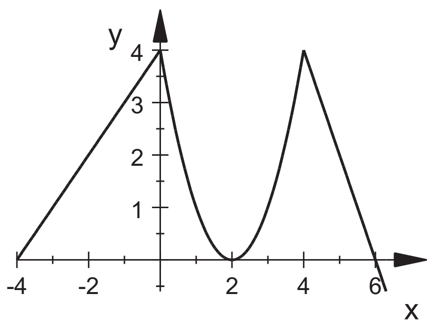


Figura 4.12:

2. $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se} \quad x \leq -4 \\ 2, & \text{se} \quad -4 < x \leq 1 \\ 4, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

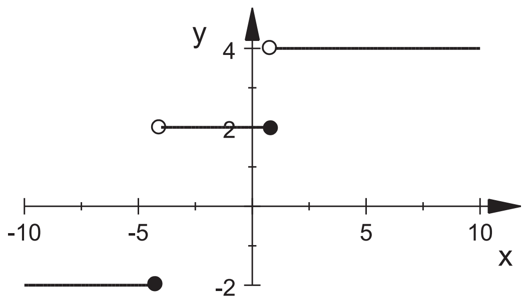


Figura 4.13:

$\boldsymbol{D}(f) = \mathbb{R}$
$\boldsymbol{Im}(f) : \{-2, 2, 4\}$

Exercícios 4.2

01- Sendo $f(x) = x^2 - 5x + 6$, ache:

a) O domínio de f;
b) A imagem de f;
c) O valor mínimo da função;
d) Os pontos onde o gráfico de f intercepta o eixo x;
e) O gráfico de f.

02- Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ x^2, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$,

Calcule:

a) $f(2)$
b) $f(-2)$
c) $f(x+1)$.

03- O custo de uma corrida de táxi em uma certa área metropolitana é tabelado da seguinte maneira: qualquer corrida inferior a 2km custa R$1,75; após os 2km, o passageiro paga um adicional de R$0,50 por km. Se $f(x)$ é o custo total de uma corida de x km, então o valor de $f(x)$ é:

$$f(x) = \begin{cases} 1,75; & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1,75 + 0,5.(x-2); & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Qual o gasto de um passageiro se ele anda 1km?

b) Qual o gasto de um passageiro se ele anda 4km?

04- Considere as funções seguintes e esboce seus gráficos, tendo em mente que o domínio delas é $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < -2 \\ 2, & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ x + 2, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ x - 2, & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

4.8 Função Modular

É a função definida por $f(x) = |x|$. Ela também pode ser escrita da seguinte forma:
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathbf{Im}(f) = [0, +\infty)$

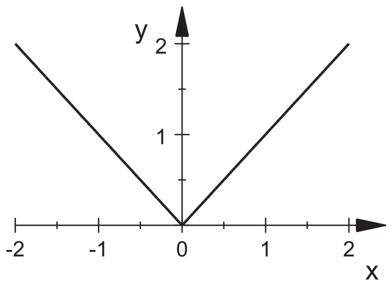


Figura 4.14:

Exemplo 4.10

1. $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

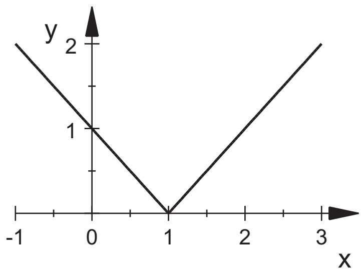


Figura 4.15:

2. $f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 0 \\ -x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

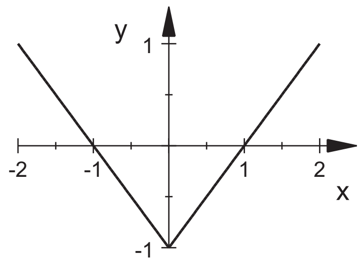


Figura 4.16:

DICAS

Para construirmos o gráfico de uma funçãof do tipo $f(x) = |g(x)|$, executamos os seguintes passos:

► Construímos o gráfico da função g:

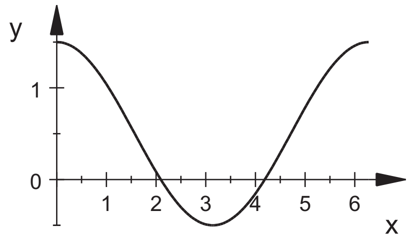


Figura 4.17:

► No gráfico de g conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos os de **ordenadas negativas** em seus simétricos em relçação ao eixo das abcissas, obtendo assim o gráfico de f:

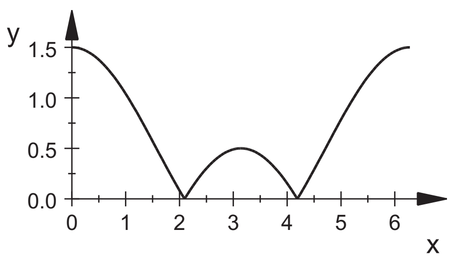


Figura 4.18:

Exercícios 4.3

1- Considere as funções seguintes e esboce seus gráficos, tendo em mente que o domínio delas é $\mathbb{R}$

a) $f(x) = |x|$;(esta função é chamada função modular)

b) $f(x) = x + |x|$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}; x \neq 0$

d) $f(x) = |2x + 3|$

e) $f(x) = |x + 1| + |2x + 1|$;(use a definição de módulo)

4.9 Função Racional

É uma função definida pelo quociente de duas funções polinominais, isto é, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios. O domínio de f é o conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$.

Atenção!!!!! Podemos simplificar uma função racional, mas isso não quer dizer que o gráfico desta outra função seja igual ao gráfico original.

Exemplo 4.11

Obtenha o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

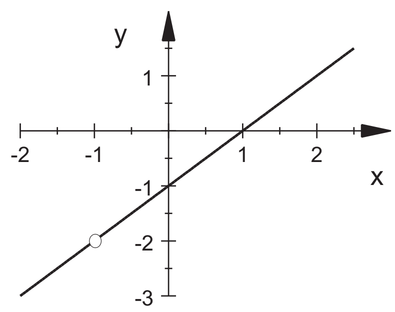


Figura 4.19:

Exercícios 4.4

1- Construa o gráfico de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

4.10 Função Crescente e Decrescente

- Uma função é dita **crescente** no intervalo (a,b) se, e somente se,

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a, b) \text{ com } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Uma função é dita **decrescente** no intervalo (a,b) se, e somente se,

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a, b) \text{ com } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Exemplo 4.12

$f(x) = x^2$

- é crescente em $(0, +\infty)$ e
- decrescente em $(-\infty, 0)$

Variação do sinal de uma função

Muitas vezes será necessário determinar os pontos em que uma função muda de sinal, isto é, onde as imagens deixam de ser positivas (negativas) e passam a ser negativas (positivas).

Sejam os dois gráficos abaixo:

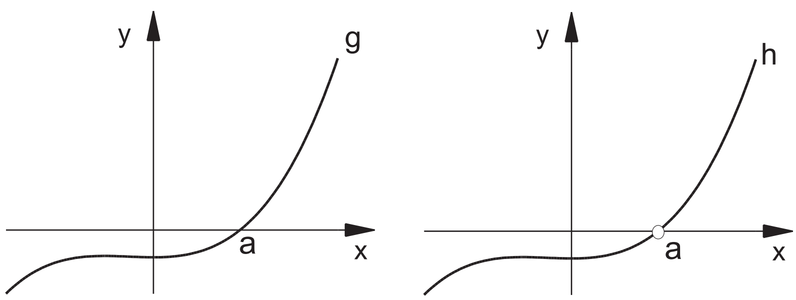


Figura 4.20:

Observe que, no gráfico I, $y = g(x)$ muda de sinal no ponto de abcissa $x = a$ e passa de negativa, ou seja $y = g(x) < 0$ para positiva $y = g(x) > 0$ e que $g(a) = 0$. No gráfico II, $y = h(x)$ muda de sinal no ponto de abcissa x=a e passa de $y = h(x) < 0$ para $y = h(x) > 0$ sendo que $h(a)$ não está definida.

Afirmamos que se $y = f(x)$ muda de sinal em $x = a$ então ou $f(a) = 0$ ou $f(x)$ não está definida em **a** (a recíproca não é verdadeira!!!!). Assim, *os únicos pontos em que uma função pode mudar de sinal são aqueles onde ela se anula ou onde não é definida.*

Exercícios 4.5

Determine os pontos em que as funções $f(x) = x^3 - 3x + 4 = (x-2)^2(x+1)$ e $h(x) = \dfrac{1}{x-3}$ mudam de sinal. Observe os gráficos abaixo.

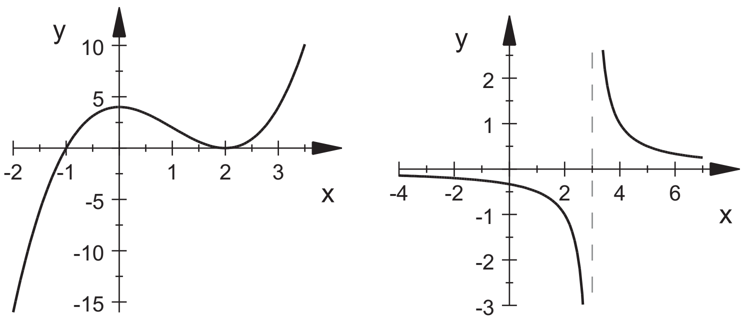


Figura 4.21:

Observe que para determinar o sinal de uma função (se é positiva ou negativa) num intervalo contido no domínio da função e onde esta não se anule é suficiente determinar seu sinal em um ponto qualquer deste intervalo.

Exemplo 4.13

1. *Determine o(s) intervalo(s) em que* $f(x) = x^2 - 2x - 8 \geq 0$

   Serão feitas duas resoluções diferentes:

   $\triangleright$ *Utilizando a fatoração, transforma-se a expressão* x^2-2x-8 *no produto* $(x-4)(x-2)$ *e analisa-se o sinal de cada uma das funções* $y = x - 4$ *e* $y = x + 2$.

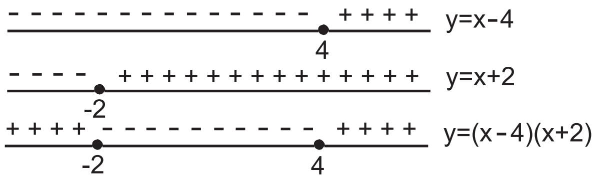


Figura 4.22:

$\boxed{\textit{Solução: } (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)}$

▷ *Analisa-se o sinal da função* $y = x^2 - 2x - 8$ *(parábola).*

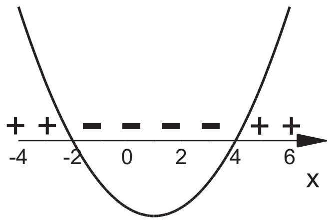


Figura 4.23:

$\boxed{\textit{Solução: } (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)}$

2. Determine o(s) intervalo(s) em que $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5} > 0$.

   Analisando o sinal das equações $y = x - 1$ e $y = x + 5$ temos:

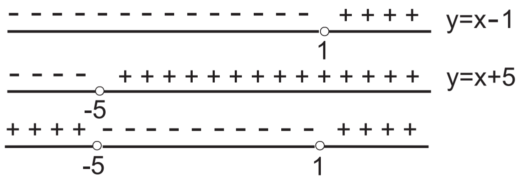


Figura 4.24:

$\boxed{\textit{Solução: } (-5; 1) \textit{ ou } S = \{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 1\}}$

Exercícios 4.6

01- Resolva:

a) $x^2 - 8x + 12 < 0$

b) $-x^2 + 3x - 4 \leq 0$

c) $x^2 - 8x + 16 > 0$

d) $2x^2 - 5x + 4 > 0$

e) $x^2 - 6x + 10 < 0$

4.11 Função Composta

Vamos definir agora uma operação com funções (composição) que não possui analogia com a aritmética dos números reais.

Sejam $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$. Aplicando sucessivamente, primeiro a função f e, sobre a imagem obtida, a função g, teremos uma nova função, a saber: $g(f(x)) = (x + 1)^2$.

Dadas as funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g \circ f$, é definida por:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Isto é, $\mathbf{D}(g \circ f) = \{x \in \mathbf{D}(f) | f(x) \in \mathbf{D}(g)\}$.

O desenho abaixo explicita a composição das funções f e g.

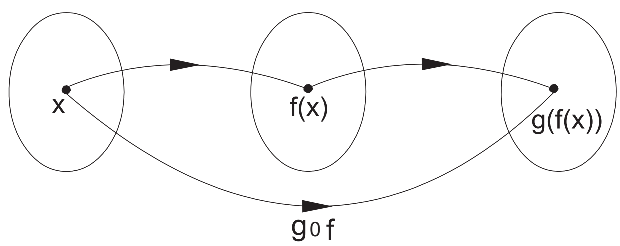


Figura 4.25:

Exemplo 4.14

1. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$. Logo, $f \circ g(x) = \sqrt{x-1}$ e $g \circ f(x) = \sqrt{x} - 1$

   $\triangleright$ $\mathbf{D}(f) = [0, \infty)$ e $\mathbf{Im}(f) = [0, \infty) \subset \mathbf{D}(g) = \mathbb{R}$ então, $\mathbf{D}(g \circ f) = [0, \infty)$

   $\triangleright$ $\mathbf{D}(g) = \mathbb{R}$ e $\mathbf{Im}(g) = \mathbb{R}$. $\mathbf{D}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} | (x-1) \in \mathbf{D}(f)\} = [1, \infty)$

2. Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (f \circ g)(x) = x + 3$

   $\triangleright$ $\mathbf{D}(f \circ g) = \{x \in D(g)/g(x) \in \mathbf{D}(f)\} = \{x \in [0, \infty)/(\sqrt{x} \in \mathbb{R})\} = [0, \infty)$.

   Assim, $(f \circ g)(x) = x + 3, x \geq 0$

Muitos problemas matemático podem ser atacados decompondo funções em funções mais simples

Exemplo 4.15

1. Dada a função $h(x) = (x+1)^2$. Para calcular $h(x)$ em um determinado valor de x, calculamos $x + 1$ e depois elevamos esse resultado ao quadrado. Estas operações são realizadas pelas funções $g(x) = x + 1$ e $f(x) = x^2$. Podemos então expressar h em termos de f e g escrevendo $h(x) = (x+1)^2 = (g(x))^2 = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

2. Seja $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$.
   $h(x) = (f \circ g)(x) = f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercícios 4.7

Dadas as funções reais de variável real $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 - 5$, determinar:

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(g \circ f)(4)$

c) $(f \circ g)(x)$

d) $(f \circ g)(4)$

4.12 Função Inversa

Seja uma função $f : A \to B$. Se para cada $y \in B$, existir exatamente um valor $x \in A$ tal que $f(x)$, isto é, se f é bijetora, então podemos definir uma função $g : B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é chamada função inversa de f e denotada por f^{-1}. Se $f : A \to B$ é uma função bijetora então $g : B \to A$ é a inversa de f se e somente se:

- $g(f(x)) = x, \forall\, x \in A$
- $f(g(y)) = y, \forall\, y \in B$

Exemplo 4.16

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 5$

   $\rhd$ $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{2}$

2. $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ tal que $f(x) = \dfrac{x-1}{3-x}$

   $\rhd$ $f^{-1} : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ com $f^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{x+1}$.

Graficamente pode-se determinar se uma função admite inversa passando uma reta paralela ao eixo dos x. Se esta cortar o gráfico sempre em apenas um ponto então a função tem uma inversa (justifique!). Para se traçar o gráfico da função inversa traça-se a reta y=x. O gráfico de f e f^{-1} são simétricos em relação a esta reta.

Exemplo 4.17

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $f(x) = x^2$ admite inversa $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $g(x) = \sqrt{x}$.

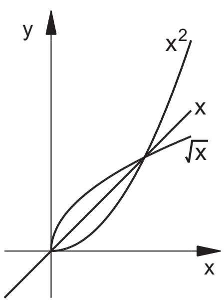


Figura 4.26:

Técnica para obtenção da inversa de uma função

Se uma função real de variável real $y = f(x)$ é inversível, sua inversa é obtida do seguinte modo:

- trocamos x por y, escrevendo $x = f(y)$;
- isolamos a variável y, após a mundança de variáveis, obtendo $y = f^{-1}(x)$.

Exercícios 4.8

Verifique se as funções seguintes são inversíveis. Em caso positivo, determine suas inversas. Em caso negativo, faça restrições nos domínios para que elas passem a ser inversíveis e então determine suas inversas.

a) $f(x) = -3x + 7$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

c) $f(x) = x^2$.

4.13 Função Exponencial

Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, define-se a função exponencial de base a por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com:

- $f(x) = a^x$. Note que $Im(f) = (0, \infty)$
- $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

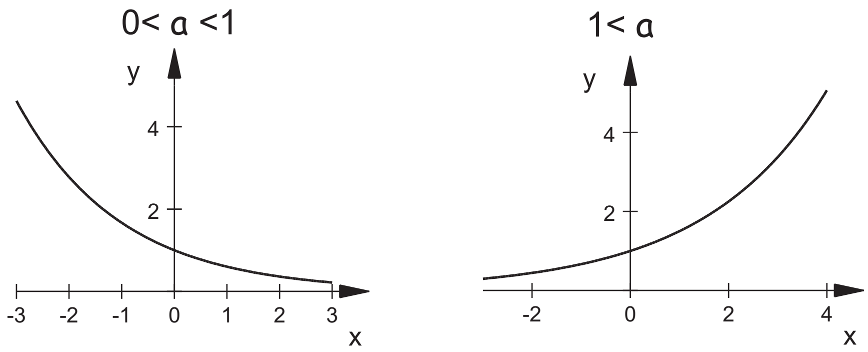


Figura 4.27:

4.14 Função Logaritmica

Seja **a** e **b** números reais positivos, com $a \neq 0$. Chama-se logaritmo de **b** na base **a**, o exponente que deve ter **a** para que a potência obtida seja **b**. Isto é,

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Como consequência da definição, segue para $0 < \mathbf{a} \neq 1$, e para $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} > 0$, as seguintes propriedades:

- $log_a 1 = 0$
- $log_a a = 1$
- $log_a(b.c) = log_a b + log_a c$
- $log_a(b/c) = log_a b - log_a c$
- $log_a b^m = m.log_a b$
- $a^{log_a b} = b$
- $log_a b = \dfrac{log_k b}{log_k a}; \; k = constante$

Exercícios 4.9

1. Resolva as equações:

   (a) $3^x = 81$

   (b) $4^3 = (x+2)^3$

   (c) $(\frac{1}{3})^{(x-1)} = 27$

   (d) $x^{\frac{3}{4}} = 8$

   (e) $e^{\sqrt{x}} = e^3$

   (f) $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$

2. Esboce o gráfico da função $f(x) = a^x$ para:

   (a) $a = 1$

   (b) $a = \frac{1}{3}$

   (c) $a = 4$

4.15 Função Logarítmica

Dado um número **a**, tal que $0 < \mathbf{a} \neq 1$, chamamos função logarítmica de base **a**, a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_a x$, sendo f a função inversa de g definida por $g(x) = a^x$.

- $\mathbf{D}(f) = (0, \infty)$ e $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente $0 < a < 1$.

O gráfico da função logarítmica é simétrico ao gráfico da função exponencial em relação a reta $y = x$.

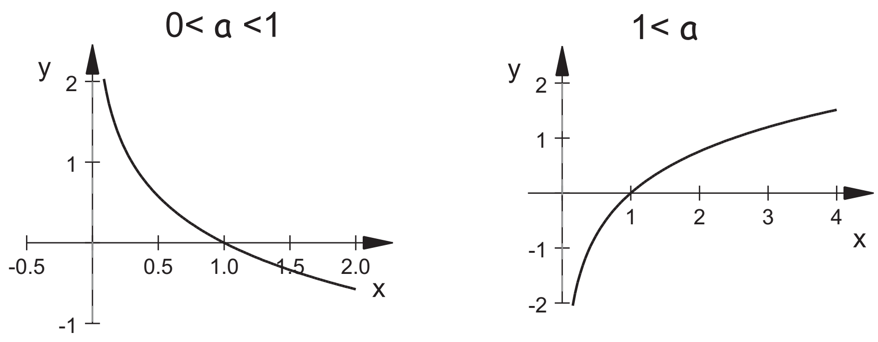


Figura 4.28:

Os logarítmos mais largamente utilizados nas aplicações são os logarítmos naturais os quais têm uma base irracional denotada por **e** em homenagem ao matemático Leonard Euler. Com até 6 casas decimais o valor de **e** é 2,718282.

Representa-se $log_e \mathbf{b} = ln\mathbf{b}$ e quando não expecifica a base no logarítmo, na verdade a base é 10: $log\mathbf{b} = log_{10}\mathbf{b}$.

Claro que tudo que foi visto de logaritmo e exponencial vale para essa base particular.

Exercícios 4.10

1. Resolva as equações:

   (a) $log_2(2x + 10) + log_2(x + 1) = 6$

   (b) $log_6(x^2 - 1) + log_{\frac{1}{6}}(x - 2) = log_{36}64$

   (c) $log_x 32 = +5$

   (d) $log_2(3x - 1) > 3$.

2. Considere as funções seguintes e esboce seus gráficos, tendo em mente que o domínio é $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} 2^x, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ logx, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < -2 \\ 2, & \text{se} \quad -2 \leq x < 1 \\ lnx, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} e^x - 1, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad 1 < x \leq e \\ lnx, & \text{se} \quad x > e \end{cases}$

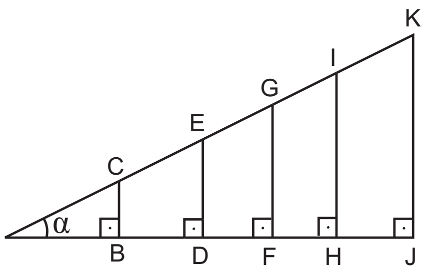
Capítulo 5

Trigonometria

As relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo deram origem a um ramo da matemática chamado Trigonometria. Nesta área, se estuda a função trigonométrica, que servem de modelos matemáticos para fenômenos

5.1 Relações num Triângulo Retângulo

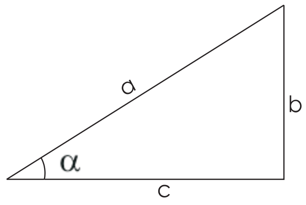
Observe a sequência de triângulos retângulos da figura:



Vejam que todos são semelhantes entre si, pois têm um ângulo reto e α é comum a todos eles. Assim, nesta sequência de triângulos, as razões entre as medidas dos lados do triângulo ABC são iguais às correspondentes razões dos demais triângulos. Por exemplo, valem as relações:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{AK}} = ... = \text{constante}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{AK}} = ... = \text{constante}$$



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{AJ}} = ... = \text{constante}$$

Essas constantes dependem apenas do ângulo α comum a todos os triângulos. Portanto, em qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo cuja medida é α, podemos dizer que:

• A razão entre o **cateto oposto** a α e a **hipotenusa** é constante e definida como **seno** de α

$$\boxed{sen(\alpha) = \frac{b}{a}}$$

• A razão entre o **cateto adjacente** a α e a **hipotenusa** é constante e definida como **cosseno** de α

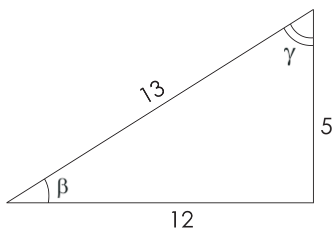
$$\boxed{cos(\alpha) = \frac{c}{a}}$$

• A razão entre o **cateto oposto** a α e o **cateto adjacente** é constante e definida como **tangente** de α

$$\boxed{tg(\alpha) = \frac{b}{c}}$$

Exemplo 5.1

Dado o triângulo

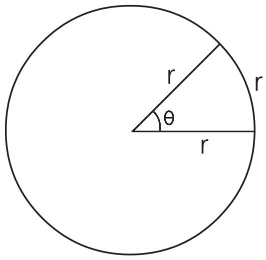


então

$$sen(\beta) = \frac{5}{13}; \quad cos(\beta) = \frac{12}{13}; \quad tg(\beta) = \frac{5}{12}$$
$$sen(\gamma) = \frac{12}{13}; \quad cos(\gamma) = \frac{5}{13}; \quad tg(\gamma) = \frac{12}{5}$$

5.2 Medidas em Radianos

A unidade mais comum para medir ângulos é o grau (1 ângulo reto = 90º). Entretanto, outra unidade padrão para medida de ângulo é o *radiano.* Um radiano é o ângulo que, colocado no centro de uma circunferência, subentende um arco cujo comprimento é igual ao raio.



θ = 1 radiano

Porém, geralmente: o número de radianos num ângulo central arbitrário (figura) como sendo a razão entre o comprimento do arco subentendido e o raio, $\theta = s/r$, ou, de modo equivalente, um ângulo central de θ radianos subtende um arco cujo comprimento é θ vezes o raio, $s = \theta r$. Uma vez que a circunferência tem comprimento $c = 2\pi r$, um ângulo central completo de 360º é equivalente a $2\pi\frac{r}{r} = 2\pi$ radianos.

$$2\pi \;\; radianos = 360^o, \qquad \pi \;\; radianos = 180^o$$

$$1 \;\; radiano = \frac{180}{\pi} \cong 57,296^o, \qquad 1^o = \frac{\pi}{180} radianos \cong 0,0175 \;\; radianos$$

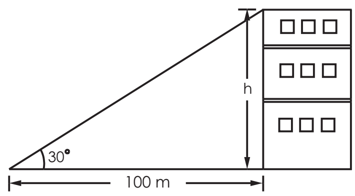
Além disso, $90^o = \dfrac{\pi}{2}$ rad, $60^o = \dfrac{\pi}{3}$ rad, $45^o = \dfrac{\pi}{4}$ rad, $30^o = \dfrac{\pi}{6}$ rad

A tabela seguinte relaciona alguns valores que de tão freqüentes, merecem ser memorizados.

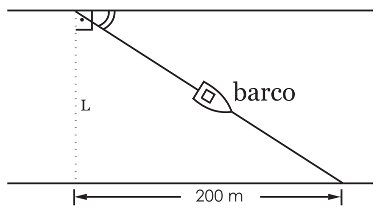
	$30^o = \frac{\pi}{6}rad$	$45^o = \frac{\pi}{4}rad$	$60^o = \frac{\pi}{3}rad$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios 5.1

1. Calcular a altura do edifício da figura, sabendo que

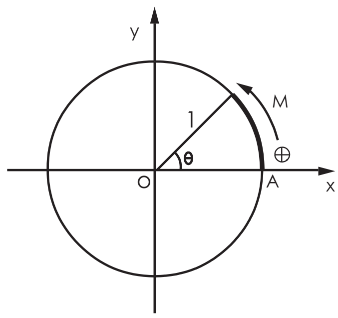


2. Uma canoa atravessa um rio chegando à outra margem com um deslocamento de 200m rio abaixo. Calcule a largura do rio, sabendo que a linha de trajetória do barco forma um ângulo de 30° com a margem, conforme mostra a figura.



5.3 Circunferência Trigonométrica

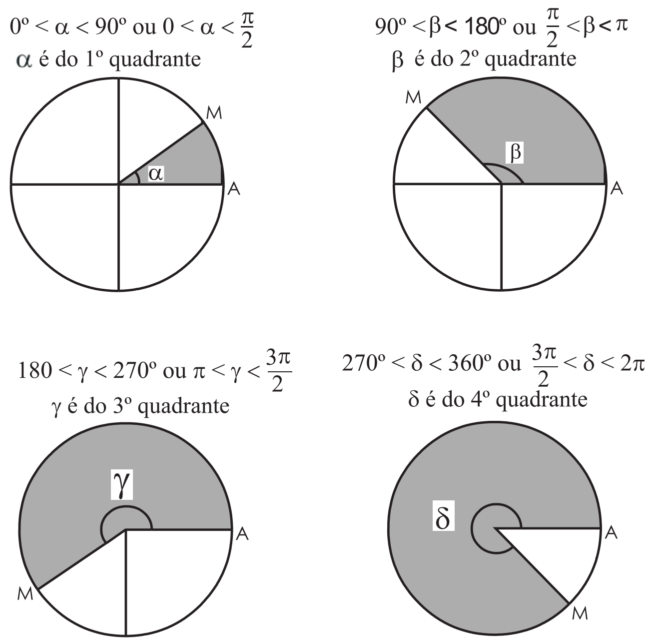
Até aqui, temos definidos valores de seno, cosseno e tangente apenas para valores entre 0° e 90° (ou entre 0 e π radianos). Desejamos estender estes conceitos para os conjuntos dos números reais. Para isso considere que a circunfência trigonométrica possui as seguintes características:



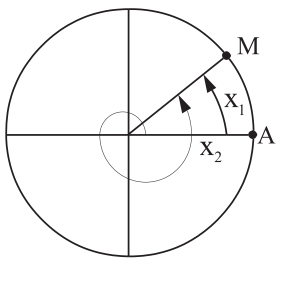
- raio igual a 1;
- centro na origem de um sistema de eixos ortogonais;

- um ponto A(0,1), origem de todos os arcos;
- um sentido positivo de orientação: anti-horário.

A circunferência trigonométrica é dividida em quatro partes iguais, chamadas *quadrantes*, numeradas como a seguir:

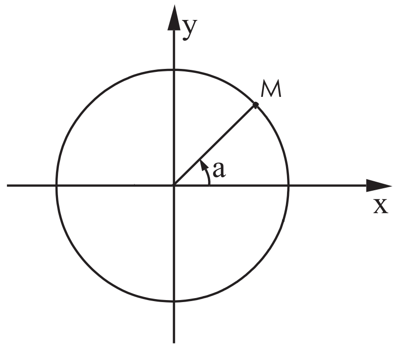


Veja agora os ângulos da figura:



Note que tanto x_1 quanto x_2 têm origem comum **(A)** e mesma extremidade **(M)**, somente diferindo quanto ao número de voltas. Ângulos nessas condições dizem-se congruentes ou côngruos e indica-se $x_1 \sim x_1$.

Podemos então dizer que o ponto da circunferência **(M)** determinam um ângulo **(a)** com menos de uma volta e todos os côngruos a ele.



Isto é: qualquer ângulo **x** côngruo ao ângulo **a** pode ser representado por:

$$\boxed{x = a + 2k\pi}$$

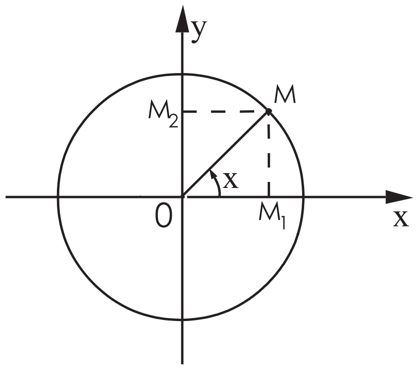
onde **k** é o número de voltas

5.3.1 As Funções: $sen(x)$ e $cos(x)$

Seja **x** $\in \mathbb{R}$ um número real e considere o arco **AM** de comprimento **x**, com sentido positivo se **x**< 0, definimos:

Pelo visto anteriormente, dizemos que:

- seno de **x** como a ordenada do ponto **M**; em símbolos, $sen(x) = OM_2$
- cosseno de **x** como a abcissa do ponto **M**; em símbolos, $cos(x) = OM_1$



Obtemos desta forma duas funções reais, com valores reais, a saber seno e cosseno, $\forall$ **x** $\in \mathbb{R}$.

De imediato, conclui-se que $(senx)^2 + (cosx)^2 = 1$; é mais comum escrever-se $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$. Convença-se que **x** pode assumir qualquer valor real, acompanhando os argumentos seguintes:

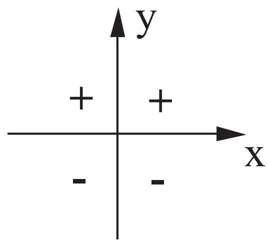
• Sendo $x \geq 0$, seja **OM** o raio que a partir da posição **AO** gira **x** radianos no sentido horário;

• Se $x < 0$, **OM** gira-se **-x** radianos no sentido anti-horário. Dessa forma, cada número real determina uma única posição de **OM**.

Então, o domínio das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = cos(x)$ é $\mathbb{R}$
Observe que:

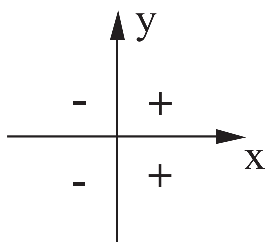
► $sen(x) > 0$ para arcos do 1º e 2º quadrantes
► $sen(x) < 0$ para arcos do 3º e 4º quadrantes

que pode ser visualizado:



Veja também que:

► $cos(x) > 0$ para arcos do 1º e 4º quadrantes
► $cos(x) < 0$ para arcos do 2º e 3º quadrantes



Exercícios 5.2

1. Determine o sinal de:

   (a) $sen(30^o)$

   (b) $cos(125^o)$

(c) $sen(365^o)$

(d) $cos(-30^o)$

(e) $sen(1215^o)$

(f) $cos(-405^o)$

(g) $sen(-\frac{\pi}{3})$

(h) $cos(\frac{\pi}{7})$

(i) $sen(\frac{23\pi}{32})$

(j) $cos(\frac{-213\pi}{214})$

Imagem das Funções: $sen(x)$ **e** $cos(x)$

Estudando o seno e cosseno na circunferência trigonométrica, você pode observar que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ temos:

$$\boxed{-1 \leq sen(x) \leq 1}$$

isto é:

- valor máximo de $sen(x) = 1$
- valor mínimo de $sen(x) = -1$

e que:

$$\boxed{-1 \leq cos(x) \leq 1}$$

isto é:

- valor máximo de cos(x) = 1
- valor mínimo de cos(x) = -1

Com isso podemos dizer que o conjunto-imagem da função seno e da função cosseno é o intervalo [-1,1].

Para desenhar o gráfico das funções trigonométrica, vamos calcular o valor numérico para alguns ângulos.

Gráfico da função sen(x)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π	$-\pi/4$	$-\pi/2$
sen(x)	0	$\sqrt{2}/2$	1	-1	0	$-\sqrt{2}/2$	-1

Variação do Seno

Observe na circunferência trigonométrica que:

- Quando o **x** varia de 0 a $\pi/2$, o seno *cresce* de 0 a 1
- Quando o **x** varia de $\pi/2$ a π, o seno *decresce* de 1 a 0
- Quando o **x** varia de π a $3\pi/2$, o seno *decresce* de 0 a -1
- Quando o **x** varia de $3\pi/2$ a 2π, o seno *cresce* de -1 a 0

Observe que sen(x)=0 para $\mathbf{x} \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Podemos então dizer que a função $f(x) = sen(x)$ se anula para $x = k\pi$, onde k é inteiro.

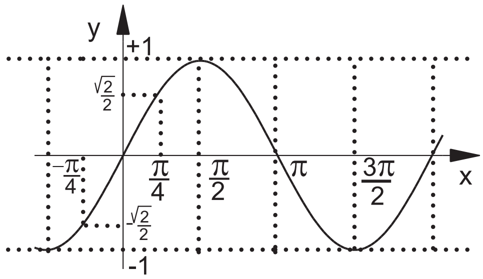


Gráfico da função cos(x)

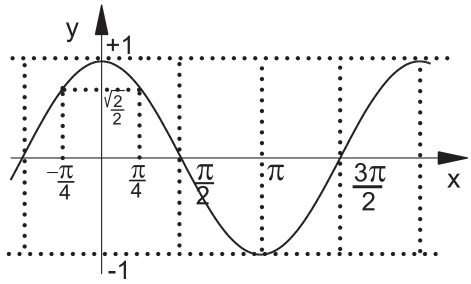
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$-\pi/4$	$-\pi/2$
cos(x)	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1	0	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0

Variação do Cosseno

- Quando o **x** varia de 0 a $\pi/2$, o cosseno *decresce* de 1 a 0
- Quando o **x** varia de $\pi/2$ a π, o cosseno *decresce* de 0 a -1
- Quando o **x** varia de π a $3\pi/2$, o cosseno *cresce* de -1 a 0
- Quando o **x** varia de $3\pi/2$ a 2π, o cosseno *cresce* de 0 a 1

Observe que $cos(x) = 0$ para **x** valendo $...\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}...$ ou de uma maneira geral, **x** $\in \{...\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}...\}$ isto é:

$$\boxed{\text{cos(x)=0 para x=(2k + 1).}\frac{\pi}{2}\text{, k inteiro}}$$



Períodos das funções: $sen(x)$ **e** $cos(x)$

Dizemos que uma função f é periódica se e somente se existe $p > 0$ tal que

$$f(x+p) = f(x), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbf{D}(f)$$

o menor valor de p que obedece à definição acima é chamado *período* da função.

Ora, nós sabemos que: $x; (x+2\pi); (x+4\pi); (x+6\pi)$... são arcos côngruos, todos eles determinados pelo mesmo ponto **M** da circunferência trigonométrica, e, como consequência:

$$sen(x) = sen(x+2\pi) = sen(x+4\pi) = sen(x+6\pi)=...$$
$$cos(x) = cos(x+2\pi) = cos(x+4\pi) = cos(x+6\pi)=...$$

isto é:

As funções $f(x) = sen(x)$ **e** $f(x) = cos(x)$ **são periódicas do período** 2π**; ou seja,** $sen(x+2\pi) = sen(x)$ **e** $cos(x+2\pi) = cos(x)$

Exemplo 5.2

1. Calcular $sen(7\pi/2)$

   O problema se resume em obter um número real **x** côngruo a $7\pi/2$, $0 \leq x \leq 2\pi$

   $$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi + 3\pi/2$$

   logo,
   $sen(7\pi/2) = sen(3\pi/2) = -1$

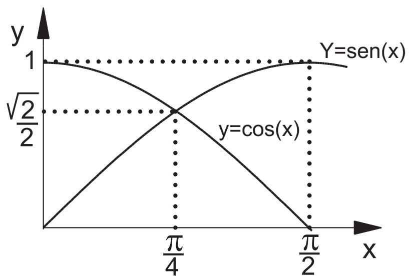
2. Calcular o valor máximo de $y = 3 + cos(x)$

   Se o valor máximo de $cos(x) = 1$, podemos concluir que o valor máximo de $y = 3 + cos(x)$ é 3+1=4.

3. Se $0 \leq x \leq \pi/2$, para que valores de x temos:

   a) $sen(x) = cos(x)$
   b) $sen(x) > cos(x)$
   c) $sen(x) < cos(x)$

   ▷ Desenhando os gráficos do seno e cosseno para $0 \leq x \leq \pi/2$ podemos observar que:



   a) $x = \pi/4$
   b) $x > \pi/4$
   c) $x < \pi/4$

Exercícios 5.3

1. Calcular o valor numérico de:

   (a) $y = sen^2(\frac{x}{4}) + sen(\frac{x}{6}) - \dfrac{1}{sen^2(\frac{x}{3})}$, *para* $x = \pi$

   (b) $y = sen^2(x) + sen(2x) + 2sen(x)$, *para* $x = \dfrac{\pi}{4}$

2. Calcular:

   (a) $cos(\dfrac{13\pi}{4})$

   (b) $cos(\dfrac{17\pi}{2})$

3. Calcular o valor máximo de:

(a) $y = 3 - cos(x)$

(b) $y = 3cos(x) - 1$

(c) $y = 5cos^2(x)$

(d) $y = cos^2(x - 1)$

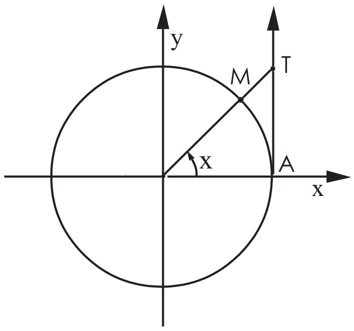
5.3.2 A Funções tangente, $f(x) = tg(x)$

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

Note que o domínio da função tangente não são todos os números reais, uma vez que precisamos cos(x)$\neq 0$. Portanto,

D(tg(x))=$\{x \in \mathbb{R}; cos(x) \neq 0\}$=$\{x \in \mathbb{R}; x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Na figura abaixo, o segmento **AT** representa a tangente do ângulo α:
Isto é, $tg(\alpha)$=**AT** (paralelo eixo do y)



Observe que
• $tg(\alpha) > 0$ para arcos do 1º e 4º quadrantes.
• $tg(\alpha) < 0$ para arcos do 2º e 3º quadrantes.

Em qualquer quadrante a tangente é sempre crescente, o período é sempre crescente. O período dessa função é π

Variação da Tangente

• Quando x varia no intervalo $[0, \pi/2)$, a tangente aumenta,variando no intevalo $[0, +\infty)$
• Quando x varia no intervalo $(\pi/2, \pi]$, a tangente aumenta,variando no intevalo $(-\infty, 0]$

• Quando x varia no intervalo $[\pi, 3\pi/2)$, a tangente aumenta,variando no intevalo $[0, +\infty)$

• Quando x varia no intervalo $(3\pi/2, 2\pi]$, a tangente aumenta,variando no intevalo $(-\infty, 0]$

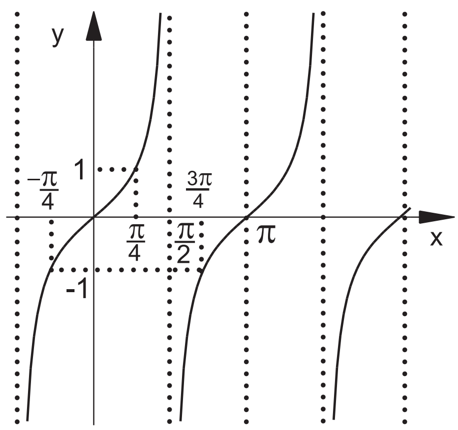
Conjunto-Imagem da Tangente

A $tg(x)$ varia no intervalo $]-\infty, +\infty[$, então $\mathbf{Im}(tg(x)) = \mathbb{R}$

Gráfico da função $f(x) = tg(x)$

A tribuindo alguns valores a variável **x** obtemos a tabela:

x	tg(x)
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	$\nexists$
$3\pi/2$	-1
π	0
$3\pi/2$	$\nexists$
2π	0
$-\pi/4$	-1
$-\pi/2$	$\nexists$



Período da função $tg(x)$

Observando o gráfico, você pode notar que o período da função tangente é π, isto é, tg(x+π)=tg(x), para qualquer **x** pertencente ao domínio da função.

De forma análoga, definimos outras funções trigonométricas a partir das funções sen(x) e cos(x)

- $f(x) = cotg(x) = \dfrac{1}{tg(x)} = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$ (função cotangente, cujo domínio é x tal que $sen(x) \neq 0$)
- $f(x) = sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$ (função secante, que existe só se $cos(x) \neq 0$)
- $f(x) = cossec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$ (função cossecante, que existe para x tal que $sen(x) \neq 0$)

Exercícios 5.4

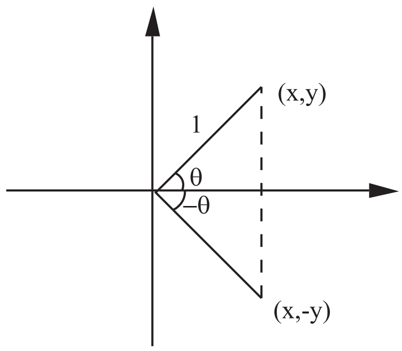
1. Se $sen(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $f(x) = sen(x) + cos(x) + tg(x) + cotg(x) + sec(x) + cossec(x), calcular f(\frac{\pi}{4})$
2. Quais os valores de x para as quais a função $y = 5sec(\frac{3x}{2})$ não está definida?
3. Quais os valores de x para as quais a função $y = 1 + 3cosec(4x), 0 \leq x \leq \pi$ não está definida?
4. Determine o domínio e imagem da função $y = 2sec(3x)$
5. Calcule o valor máximo de:

   (a) $y = 3sen(x)$
   (b) $y = 2sen(x) + 3$
   (c) $y = 3sen(x) - 4$
   (d) $y = 2cos(x) + 5$
   (e) $y = 2sec(x) - 5$

Identidades Trigonométricas

Existem inúmeras identidades que expressam as principais propriedades das funções trigonométricas. Sejam θ e ϕ dois ângulos; então; as identidades seguintes estabelecem o efeito da substituição de θ e -θ. Tendo-se em vista a figura abaixo e o fato óbvio de que as extremidades dos dois raios estão na mesma vertical para todos os valores de θ, temos imediatamente as duas primeiras identidades.

- sen(-θ)=sen(θ),
- cos(-θ)=cos(θ),
- tg(-θ)= -tg(θ)



O próximo grupo consiste em três identidades muito úteis. Antes de enunciá-las devemos explicar que os símbolos $sen^2(\theta)$ e $cos^2(\theta)$ são notações-padrão para $(sen\theta)^2$ e $(cos\theta)^2$.

$\boxed{sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1}$ $\rightarrow$ Demonstrado usando as definições de seno e cosseno

$\boxed{tg^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)}$ $\rightarrow$ Divida o anterior por $cos^2(\theta)$

$\boxed{1 + cotg^2(\theta) = cossec^2(\theta)}$ $\rightarrow$ Divida a primeira por $sen^2(\theta)$

O grupo seguinte constitui as "fórmulas de adição/subtração"

$$\boxed{sen(\theta \pm \phi) = sen(\theta)cos(\phi) \pm cos(\theta)sen(\phi)}$$

$$\boxed{cos(\theta \pm \phi) = cos(\theta)cos(\phi) \mp sen(\theta)sen(\phi)}$$

$$\boxed{tg(\theta \pm \phi) = \frac{tg(\theta) \pm tg(\phi)}{1 \mp tg(\theta)tg(\phi)}}$$

As fórmulas do *ângulo duplo* são:

$$\boxed{sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta)}$$

$$\boxed{cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)}$$

Fazer $\phi = \theta$ nas anteriores

$$\boxed{2cos^2(\theta) = 1 + cos(2\theta)}$$

$$\boxed{2sen^2(\theta) = 1 - cos(2\theta)}$$

Combinação de algumas anteriores.

Exemplo 5.3

1. $sen(x).sec(x) = sen(x).\dfrac{1}{cos(x)} = \dfrac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x)$

2. $cos(x).tg(x) = \cancel{cos(x)}.\dfrac{sen(x)}{\cancel{cos(x)}} = sen(x)$

3. $cos^3(x) + cos(x).sen^2(x) = cos(x).[cos^2(x) + sen^2(x)] = cos(x).1 = cos(x)$

4. $1 + tg^2(x) = 1 + \dfrac{sen^2(x)}{cos^2(x)} = \dfrac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \dfrac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$

5. $1 + cotg^2(x) = 1 + \dfrac{cos^2(x)}{sen^2(x)} = \dfrac{sen^2(x) + cos^2(x)}{sen^2(x)} = \dfrac{1}{sen^2(x)} = cossec^2(x)$

Exercícios 5.5

1. Demostrar as identidades trigonométricas:

   (a) $(1 - sen^2(x))(1 + tg^2(x)) = 1$

   (b) $1 - \dfrac{cos^2(\theta)}{1 + sen(\theta)} = sen(\theta)$

2. Simplificar a expressão:

   $$E = \frac{sec(\alpha) + sen(\alpha)}{cossec(\alpha) + cos(\alpha)}$$

3. Calcular os valores de x que satisfazem simultaneamente as relações:

   $sen(\alpha) = \dfrac{2x - 4}{10}$ e $cos(\alpha) = \dfrac{x + 8}{10}$

4. Seja $y = \dfrac{sec(x) - cossec(x)}{1 - cotg(x)}$:

(a) Simplificar a expressão y

(b) Calcular y se $cos(x) = \dfrac{1}{4}$

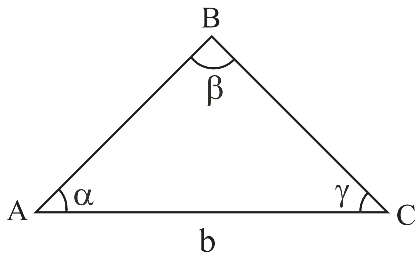
5. Calcular $sen^2(\alpha)$ e $cos^2(\alpha)$ se $tg(\alpha) = 1 + \sqrt{2}$

5.3.3 Relações Métricas num Triângulo qualquer

Existem duas leis relacionando ângulos e lados de um triângulo qualquer. São elas:

Lei dos Senos

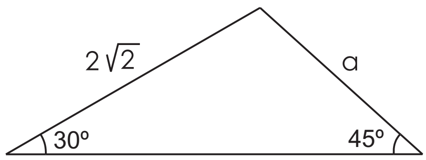
O quociente entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer e os senos dos ângulos opostos é constante.



$$\boxed{\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}}$$

Exemplo 5.4

1. Calcular o valor de **a** no triângulo abaixo

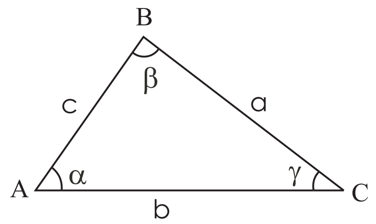


▷ Solução:

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{a}{sen(30^o)} = \frac{2\sqrt{2}}{sen(45^o)} \therefore \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \therefore \boxed{a=2}$$

2. Sabendo que no triângulo da figura



$sen(\alpha) = 0,6; sen(\gamma) = 0,5$ e a=12, calcule c.

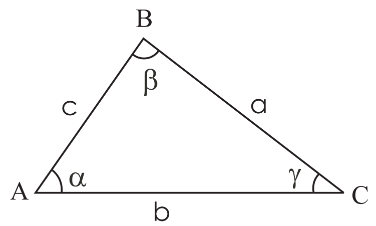
▷ Solução:

Pela Lei dos Senos

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{c}{sen(\gamma)} \therefore \frac{12}{0,6} = \frac{c}{0,5} \therefore \boxed{\text{c=10}}$$

Lei dos Cossenos

O quadrado da medida de um lado qualquer de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o duplo produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado.



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.cos(\alpha)}$$

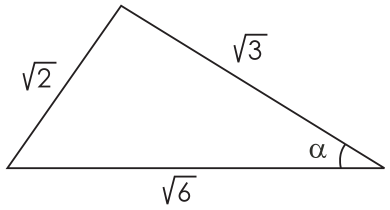
$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.cos(\beta)}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.cos(\gamma)}$$

Exemplo 5.5

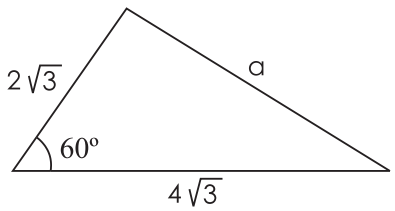
1. Calcular $cos(\alpha)$ indicado no triângulo abaixo:

▷ Solução:



Pela Lei dos Cossenos:
$(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{3}.\sqrt{6}.cos(\alpha)$
$\therefore 2 = 3 + 6 - 2\sqrt{18}.cos(\alpha)$
$\therefore -7 = -2\sqrt{18}.cos(\alpha)$
$\therefore cos(\alpha) = \dfrac{7}{2\sqrt{18}} \therefore$
$\boxed{cos(\alpha) = \dfrac{7}{6\sqrt{2}}}$

2. Calcular o lado a indicado na figura

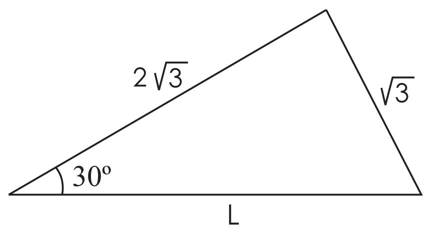


▷ Solução:
$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2.2\sqrt{3}.4\sqrt{3}.cos(60^o)$
$a^2 = 12 + 48 - 2.2\sqrt{3}.4\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}$
$a^2 = 12 + 48 - 24$
$a^2 = 36$

$\boxed{a{=}6}$

3. Calcular o lado l indicado na figura.

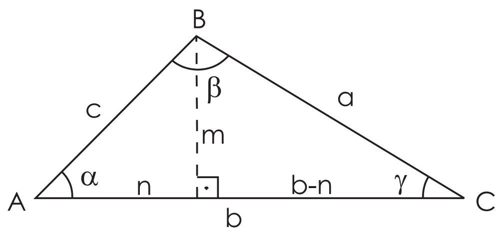
▷ Solução:
$(\sqrt{3})^2 = \mathrm{L}^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\mathrm{L}.2\sqrt{3}.cos(30^o)$
$3 = \mathrm{L}^2 + 12 - 2\mathrm{L}.2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$3 = \mathrm{L}^2 + 12 - 6\mathrm{L}$
$\mathrm{L}^2 - 6\mathrm{L} + 9 = 0$
$\boxed{\mathrm{L}=3}$

5.3.4 Justificativas das Leis

Observe a figura ao lado



<u>Senos</u>

$m = c.sen(\alpha)$ e $m = a.sen(\gamma)$;
logo, $c.sen(\alpha) = a.sen(\alpha)$ ou $\dfrac{a}{sen(\alpha)} = \dfrac{c}{sen(\gamma)}$
Por processos parecidos, vê-se que $\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$; daí a lei dos senos.

<u>Cossenos</u>

Pelo Teorema de Pitágoras:

$m^2 = a^2 - (b - n)^2$
$m^2 = c^2 - n^2$
logo, $a^2 - (b - n)^2 = c^2 - n^2$; donde: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$;
mas, $n = c.cos(\alpha)$;
daí, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha)$.

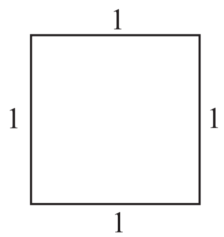
Capítulo 6

Noção de Limites

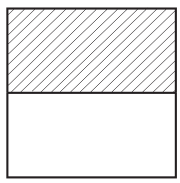
O conceito de limite é fundamental em todo o Cálculo Diferencial. O Cálculo Diferencial é aplicado em vários campos do conhecimento, como em Física, Engenharia, Geologia, Astronomia, Biologia, etc.

6.1 Idéia Intuitiva de Limite

Exemplo 6.1 1) Consideremos uma figura de forma quadrada e de área igual a 1.

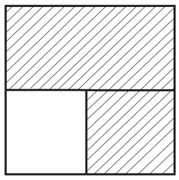


Vamos desenvolver as seguintes etapas:
Primeira: Hachurar metade dessa figura.



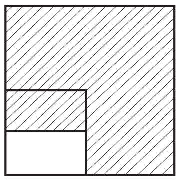
Área hachurada: $\frac{1}{2}$

Segunda: Hachurar metade do que restou em branco.

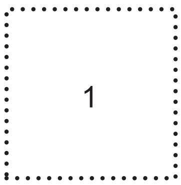


Área hachurada: $\dfrac{3}{4}$

Terceira: hachurar, novamente, metade do que restou em branco.



Continuando esse processo sucessiva e indefinidamente, a área hachurada vai preenchendo quase todo o quadrado inicial, isto é, a medida da área vai se aproximada de 1 ou tendendo a 1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, ...,$

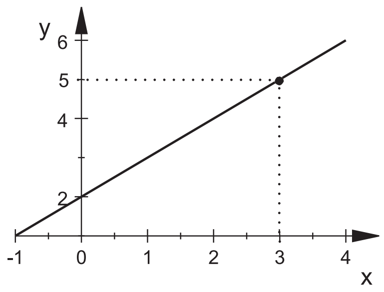


Dizemos então que o limite desse processo, quando o número de partes hachuradas cresce indefimente, é hachurar a figura toda, ou seja, obter uma área hachurada igual a 1.

Quando dizemos que a área hachurada tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor.

2) Consideremos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$.

Note que à medida que os valores de x se aproximam de 3, por valores menores que 3 (pela esquerda) ou por valores maiores que 3 (pela direita), $f(x)$ se aproxima de 5. A tabela



a seguir indica os valores de $f(x)$ para alguns valores de x:

x	2	2.3	2,9	2,99	...	3,01	3,4	3,9
$f(x)$	4	4,3	4,9	4,99	...	5,01	5,4	5,9

De acordo com o exposto, podemos dizer que:

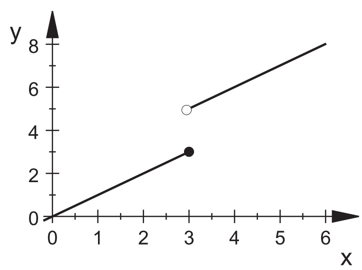
- *o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela esquerda é igual a 5, e indicamos:* $\lim\limits_{x\to 3_-} f(x) = 5$

- *o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela direita é igual a 5, e indicamos:* $\lim\limits_{x\to 3_+} f(x) = 5$
  Em vez das duas indicações anteriores, podemos utilizar a seguinte representação única: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$

Lê-se: o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 é igual a 5.

3) Consideremos também o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 3 \\ x+2, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$



Observe:

- *Quando x se aproxima de 3 pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de 3, isto é:* $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$

- *Quando x se aproxima de 3 pela direita, $f(x)$ se aproxima de 5, isto é:* $\lim\limits_{x\to 3_+} f(x) = 5$

Estes limites são chamados **limites laterais** e, como são diferentes, dizemos que neste caso não existe limite de $f(x)$ quando x tende a 3. Para que exista o limite, $f(x)$ deve se aproximar de um mesmo valor quando x se aproximade a pela direita ou pela esquerda, isto é:
$\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = \lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

6.2 Definição de Limite

Considere o gráfico da função $f(x)$:

Desenhar o gráfico 8 de limite.

Dizemos que o limite da função $f(x)$ quando x tende a a é igual ao número real L se, e somente se, os números reais $f(x)$ para os infinitos valores de x permanentemente próximos de L, sempre que x estiver muito próximo de a.
Indica-se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Exercícios 6.1 01- Seja o gráfico da função f:

DESENHAR GRAFICO 9.

Calcule, se existir:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

02- Dada a função $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ para $x \neq 0$, determine $g(0,002)$, $g(0,0001)$, $g(10000)$, $g(-0,002)$ e $g(-100000)$.

a) O que você observa para os valores de $g(x)$ quando x está próximo do zero? Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

b) O que acontece com os valores de $g(x)$ quando x assume valores grandes (em módulo)? Determine $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

A reta $x = 0$ é uma *assíntota vertical* para a função g.

03- Considere a função $h(s) = \dfrac{3s-1}{s-1}$, para $s \neq 1$. Determine:

a) Os pontos onde o gráfico intercepta o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

b) Os intervalos onde esta função é positiva e onde é negativa.

c) O que acontece com $h(s)$ quando s está próximo de 1?

d) Explique o comportamento, no infinito, da função h.

04- Dada a função $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-3x-4}$, determine:

a) $\lim_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)$. Existe $\lim_{x\to-1} f(x)$? Justifique.

b) Determine o domínio da função dada.

05- Calcule os limites, se existirem:

a) $\lim_{x\to2} 3x-1$

b) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{4x^2}{x}$

c) $\lim_{x\to-3} x\sqrt{x^2}$

d) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x-2}{x}$

e) $\lim_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^2}$

f) $\lim_{x\to2^-} \dfrac{x}{x-2}$

g) $\lim_{x\to5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

h) $\lim_{x\to0} \dfrac{(3+x)^3-27}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

6.3 Assíntotas Verticais e Horizontais

Seja f uma função real.

Definição 6.1 *Se* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x)$ *é* $+\infty$ *ou* $-\infty$*, então a reta* $x = a$ *é dita uma* ***assíntota vertical****.*

Definição 6.2 *Se* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ *ou* $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$*, então a reta* $y = L$ *é dita uma* ***assíntota horizontal****.*

Exercícios 6.2 *01- Ache as assíntotas verticais e horizontais das funções dadas, caso existam.*

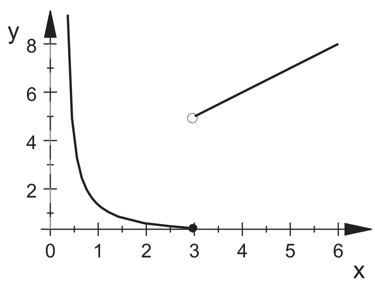
a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$

c) $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

02- Baseado no gráfico abaixo determine:



a) O domínio da função;

b) As assíntotas, caso existam.