Matemática

Matemática

Fernando Guerra
Inder Jeet Taneja

G934m Guerra, Fernando
Matemática / Fernando Guerra, Inder Jeet Taneja. – Florianópolis : SEAD/UFSC, 2006.
389p.

Curso de Graduação em Administração a Distância
Inclui bibliografia

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria analítica. 3. Cálculo diferencial. 4. Cálculo integral. I. Taneja, Inder Jeet. II. Título.

CDU: 51

Catalogação na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Luiz Inácio Lula da Silva

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Fernando Haddad

SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Ronaldo Mota

DIRETOR DO DEPARTAMENTO DE POLÍTICAS EM EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA – DPEAD
Hélio Chaves Filho

SISTEMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
REITOR
Lúcio José Botelho
VICE-REITOR
Ariovaldo Bolzan
PRÓ-REITOR DE ENSINO DE GRADUAÇÃO
Marcos Lafim
DIRETORA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Araci Hack Catapan

CENTRO SOCIOECONÔMICO
DIRETOR
Maurício Fernandes Pereira
VICE-DIRETOR
Altair Borguet

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA ADMINISTRAÇÃO
CHEFE DO DEPARTAMENTO
João Nilo Linhares

COORDENADOR DE CURSO
Alexandre Marino Costa

COMISSÃO DE PLANEJAMENTO, ORGANIZAÇÃO E FUNCIONAMENTO
Alexandre Marino Costa
Gilberto de Oliveira Moritz
João Nilo Linhares
Luiz Salgado Klaes
Marcos Baptista Lopez Dalmau
Maurício Fernandes Pereira
Raimundo Nonato de Oliveira Lima

EQUIPE DE REVISÃO

Profª Liane Carli Hermes Zanella

Prof. Luis Moretto Neto

Prof. Luiz Salgado Klaes

Prof. Raimundo Nonato de Oliveira Lima

ADAPTAÇÃO METODOLÓGICA PARA EAD

Denise Aparecida Bunn

PROJETO GRÁFICO

Annye Cristiny Tessaro

Mariana Lorenzetti

DIAGRAMAÇÃO

Diogo Henrique Ropelato

ORGANIZAÇÃO DE CONTEÚDO

Fernando Guerra

Inder Jeet Taneja

APRESENTAÇÃO

Este livro corresponde à disciplina de Matemática. É destinado aos estudantes que, pela primeira vez, estudam matemática envolvendo a Geometria Analítica, o Cálculo Diferencial e Integral de Funções, de uma ou várias variáveis. O material foi elaborado visando uma aprendizagem autônoma. Aborda temas especialmente selecionados, que se destinam a auxiliar na compreensão dos temas expostos e adota uma linguagem simples e clara, muitas vezes coloquial, o que facilite seu estudo a distância.

Por falar em distância, isso não significa que você estará sozinho. Não esqueça de que sua caminhada nesta disciplina erá acompanhada, constantemente, pelo Sistema de Acompnhamento do Programa de EaD do Departamento de Ciências da Administração da Universidade Federal de Santa Catarina. Nossa equipe terá o maior prazer em atende-lo(a), pois sua aprendizagem é o nosso principal objetivo.

Escrevemos em total, nove capítulos, divididos em quatro partes. A primeira parte está destinada ao conhecimento de Geometria Analítica e Matrizes. A segunda parte está dedicada ao Cálculo Diferencial. A terceira parte dedica-se ao Cálculo Integral. Na última parte damos conhecimento de Cálculo para Funções de várias Variáveis, incluindo Derivada Parcial e Integral Dupla. Veja a seguir os detalhes por capítulo:

No Capítulo 1, abordaremos conceitos de Geometria Analítica. Inicialmente revisaremos os conjuntos numéricos, desigualdades e intervalos. Apresentaremos o Sistema de Coordenadas Cartesianas, Distância entre dois pontos, a Reta, Parábola, Elipse, Hipérbole e Seções Cônicas.

Você estudará no Capítulo 2, os tipos de Matrizes, Operações com matrizes, matriz inversa, matriz escalonada e resolução de sistemas de equações lineares.

Já no Capítulo 3 serão abordados: Funções e Gráficos, Funções Elementares, Exponenciais e Logarítmicas, Função Composta e Funções Trigonométricas e algumas aplicações de Funções.

No Capítulo 4 você será apresentando aos temas: Seqüências e a noção intuitiva de Limite de uma Função. Neste, você trabalhará com teoremas sobre Limites, Limites Laterais e Funções Contínuas.

Estudaremos no Capítulo 5, um dos principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, que é o da Derivada de uma Função, sua interpretação Geométrica, Cálculo de Derivadas, Derivada de uma Função Composta (ou regra da cadeia), Derivadas Sucessivas, a Diferencial e algumas Funções Marginais.

No Capítulo 6, apresentaremos algumas aplicações da Derivada, tais como: a Fórmula de Taylor, Regra de L'Hospital e Máximos e Mínimos de uma Função.

O Capítulo 7 trata de uma outra ferramenta de grande importância no Cálculo Diferencial e Integral, que é o conceito de Integral. Será abordado o conceito de Integral Indefinida e Definida, suas propriedades e o Teorema Fundamental do Cálculo. Apresentaremos também as técnicas de integração por substituição e por partes e integrais indefinidas.

No Capítulo 8, você estudará sobre algumas aplicações da Integral Definida, tais como: Cálculo de Áreas entre duas Curvas, Volume de Sólido de Revolução e Comprimento de Arco.

Finalmente, no Capítulo 9, apresentaremos algumas noções básicas de Funções de árias Variáveis, Limite e Continuidade de Funções de duas Variáveis, Derivadas Parciais, Máximos e Mínimos, e Integrais Duplas.

Desejamos a todos um bom estudo.

Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja

Objetivos

- Fornecer elementos conceituais sobre matemática para administradores;
- Enumerar, sucintamente, conceitos de matemática aplicada ao campo da ciência da administração e suas principais características; e
- Definir, identificar e demonstrar ferramentas matemáticas como apoio em tomadas de decisões administrativas.

SUMÁRIO

UNIDADE 1 - Geometria Analítica

UNIDADE 2 - Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

UNIDADE 3 - Funções

UNIDADE 4 - Seqüências, Limite e Continuidade

UNIDADE 5 - Derivadas

UNIDADE 6 - Aplicações de Derivadas

UNIDADE 7 - Cálculo Integral

UNIDADE 8 - Aplicações da Integral

UNIDADE 9 - Funções de Várias Variáveis, Derivadas Parciais e Integral Dupla

UNIDADE

1

Geometria Analítica

Geometria Analítica

Objetivo

Nesta unidade você vai recordar e aplicar conceitos sobre conjuntos numéricos e geometria analítica; e identificar e aplicar equações das curvas, tais como, da parábola, da circunferência, da elipse e da hipérbole.

Geometria Analítica

Números Reais

Faremos, neste capítulo, uma rápida apresentação dos números reais e suas propriedades, mas no sentido de recordar o que você, meu caro estudante, já aprendeu no ensino fundamental e no ensino médio.

Conjuntos Numéricos

- **Números naturais**

O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ é denominado conjunto dos números naturais.

- **Números inteiros**

O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ é denominado conjunto dos números inteiros.

- **Números racionais**

São todos os números fracionários, que têm o numerador e o denominador (diferente de zero) pertencentes ao conjunto $\mathbb{Z}$. Simbolicamente

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ q \neq 0 \right\}.$$

- **Números Irracionais**

São os números que não são racionais, mas podem ser "encontrados na reta." Por exemplo:

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ \ldots$,
$\pi = 3{,}14159\ \ldots$,
$e = 2{,}718282\ \ldots$

Denotaremos por $\mathbb{Q}^c$, o conjunto dos números irracionais.

- **Números reais**

É a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, que será denotada por $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$. Como a matemática elementar envolve números reais, devemos estar familiarizados com algumas propriedades fundamentais do sistema de números reais. Observe, atentamente, cada uma dessas propriedades dadas a seguir:

P1. **Fechamento:** Se a , $b \in \mathbb{R}$, então existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma de a e b e existe um e somente um número real, denotado por $a \times b$ chamado produto de a por b .

P2. **Comutatividade:** Se a , $b \in \mathbb{R}$ então:

$$a + b = b + a \ \text{ e } \ a \times b = b \times a .$$

P3. **Associatividade:** Se $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ então:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c .$$

P4. **Distributividade:** Se $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ então:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c .$$

P5. **Existência de elementos neutros**: Existem 0 e $1 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a + 0 = a \ \text{ e } \ a \times 1 = a , \forall a \in \mathbb{R} .$$

P6. **Existência de simétricos:** Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que:

$$a + (-a) = 0 .$$

P7. **Existência de inversos:** Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$, tal que:

$$a \times \frac{1}{a} = 1.$$

Usando as propriedades P6 e P7 podemos definir a subtração e a divisão de números reais.

P8. **Subtração:** Se a, $b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b, denotada por $a - b$, é definida por:

$$a - b = a + (-b).$$

P9. **Divisão:** Se a, $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a por b é definido por:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

É importante observar que sempre que falarmos em número, sem qualquer qualificação, entenderemos tratar-se de um número real.

A reta real

O uso dos números reais para medição, tais como comprimento, área, volume, posição, tempo e velocidade, se reflete no costume bastante conveniente, de representar esses números graficamente por meio de pontos numa reta horizontal, chamada *eixo*.

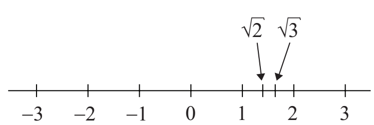


Figura 1.1

Observe que essa representação começa com a escolha de um ponto arbitrário, denominado origem ou ponto zero, e um outro ponto arbitrário a sua direita, o ponto 1. A distância entre esses pontos (distância unitária) serve como escala, por meio da qual é possível associar pontos da reta a números inteiros positivos ou negativos, como ilustrado na figura 1.1. Todos os números positivos estão à direta do Zero, no "sentido positivo", e todos os números negativos estão à sua esquerda.

Desigualdades

A sucessão de pontos na reta real, da esquerda para a direita, corresponde a uma parte importante da álgebra dos números reais, a que trata das desigualdades.

O significado geométrico da desigualdade $a < b$ (leia-se "a menor que b") é simplesmente que a está à esquerda de b; a desigualdade equivalente $b > a$ (leia-se "b maior que a") significa que b está à direta de a. Um número a é positivo ou negativo conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Se você quer dizer que a é positivo ou igual a zero, escreve-se $a \geq 0$ e lê-se "a maior ou igual a zero". Do mesmo modo, $a \geq b$ significa que $a > b$ ou $a = b$. Assim, $5 \geq 3$ e $5 \geq 5$ são desigualdades verdadeiras.

Assim como o conjunto dos Números Reais, as Desigualdades também apresentam propriedades fundamentais, dadas a seguir.

- **Propriedades das desigualdades**

Para quaisquer números reais *a, b, c* e *d*, valem as propriedades:

P1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, para qualquer real c. Por exemplo, $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$.

P2. $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$. Por exemplo, $6 < 8$ e $5 < 7 \Rightarrow 6 + 5 < 8 + 7$.

P3. $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$. Por exemplo, $5 < 9$ e $9 < 11 \Rightarrow 5 < 11$.

P4. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $3 > 0 \Rightarrow 4 \times 3 < 6 \times 3$.

P5. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a \times c > b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $-3 < 0 \Rightarrow 4 \times (-3) > 6 \times (-3)$.

P6. $0 < a < b$ e $0 < c < d \Rightarrow a \times c < b \times d$. Por exemplo, $0 < 4 < 7$ e $0 < 5 < 8 \Rightarrow 4 \times 5 < 7 \times 8$.

Módulo ou valor absoluto

Dado um número real a, o módulo ou valor absoluto é definido por:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Por exemplo,

(i) $|4| = 4$;

(ii) $\left|-\frac{3}{4}\right| = -(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$;

(iii) $|-4| = -(-4) = 4$;

(iv) $|0| = 0$;

(v) $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$.

Podemos observar que

(a) para qualquer número real a tem-se

$$|a| \geq 0 \text{ e } |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$$

(b) $|-a| = |a|$ para qualquer real a;

(c) geometricamente, o valor absoluto de um número real a, é distância de a até zero;

(d) para qualquer número real a tem-se: $\sqrt{a^2} = |a|$, a raiz quadrada de qualquer número real, quando existe, é maior ou igual a zero. Logo, $|a|^2 = a^2 = (-a)^2$.

- **Propriedades do Valor Absoluto**

Valem as seguintes propriedades do valor absoluto:

P1. $|x| \geq a$ se e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$;

P2. $|x| > a$ se e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;

P3. $|x| \leq a$ se e somente se, $-a \leq x \leq a$ $(a > 0)$;

P4. $|x| < a$ se e somente se, $-a < x < a$, $(a > 0)$;

P5. $|x \times y| = |x| \times |y|$ para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$;

P6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, para x e $y \in \mathbb{R}$, $(y \neq 0)$.

P7. Para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Intervalos

Um conjunto I de números reais é denominado *intervalo* quando, dados $a, b \in I$ com $a < b$, valer a implicação $a < x < b \Rightarrow x \in I$. Os intervalos podem ser limitados ou ilimitados.

- **Intervalos limitados**

(i) Fechado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(ii) Aberto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

(iii) Semi-abertos: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ e

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

- **Intervalos ilimitados**

(i) Fechados: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ e

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

(ii) Abertos: $\left(a,+\infty\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\ x>a\right\}$ e

$$\left(-\infty,b\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\ x<b\right\}$$

(iii) Aberto e fechado: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Veja a representação de intervalos na reta real:

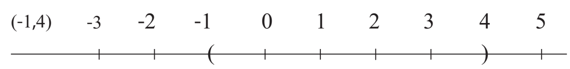


Figura 1.2

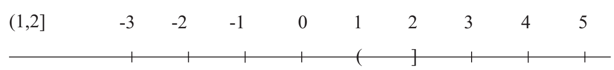


Figura 1.3

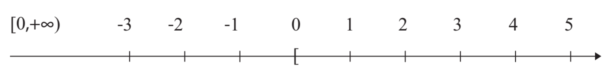


Figura 1.4

Resolver uma desigualdade consiste em determinar o conjunto dos números reais que tornam verdadeira a desigualdade proposta. Para isto, você usa as propriedades das desigualdades (e do módulo quando este estiver envolvido).

A partir de agora você irá acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre desigualdades, e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 1.1 *Resolver a desigualdade* $\left|x+4\right|\leq 7$.

Resolução: Pela propriedade P3, do módulo, temos:

$-7\leq x+4\leq 7$, ou seja,

$-7\leq x+4$ e $x+4\leq 7$

$-7-4\leq x$ e $x\leq 7-4$

$-11\leq x$ e $x\leq 3$.

Portanto, $-11\leq x\leq 3$ ou ainda $\left[-11,3\right]$.

Exemplo 1.2 *Resolver a desigualdade* $\left|x-5\right|\geq 8$.

Resolução: Pela propriedade P1, do módulo, temos

$x - 5 \leq -8$ ou $x - 5 \geq 8$

$x \leq -8 + 5$ ou $x \geq 8 + 5$

$x \leq -3$ ou $x \geq 13$.

Portanto, $x \leq -3$ ou $x \geq 13$.

Exemplo 1.3 *Resolver a desigualdade* $|5 - x| \leq 9$.

Resolução: Pela propriedade P3, do módulo, temos

$-9 \leq 5 - x \leq 9$, ou seja,

$-9 \leq 5 - x$ e $5 - x \leq 9$

$-9 - 5 \leq -x$ e $-x \leq 9 - 5$

$-14 \leq -x$ e $-x \leq 4$.

Agora, pela propriedade P5, da desigualdade, vem

$14 \geq x$ ou $x \leq 14$ e $x \geq -4$ ou $-4 \leq x$.

Portanto, $-4 \leq x \leq 14$ ou seja, $x \in [-4, 14]$.

Exemplo 1.4 *Resolver a desigualdade* $7 \leq 5x - 3 < 17$.

Resolução: Resolvendo simultaneamente, vem:

$7 \leq 5\,x - 3 < 17$ ou $7 + 3 \leq 5x - 3 + 3 < 17 + 3$

(P1 da desigualdade)

$10 \leq 5x < 20$, ou seja, $2 \leq x < 4$.

O conjunto solução, S, da desigualdade proposta é

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\} = [2, 4)$.

Exemplo 1.5 *Determine todos os números reais que satisfazem a equação* $|3x - 5| = 4$.

Para resolver este exemplo, use os seguintes passos.

Passo 1: Pela definição de módulo você tem:

$$|3x - 5| = 3x - 5 \quad \text{se} \quad 3x - 5 \geq 0 \text{ ou } 3x \geq 5 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{5}{3}.$$

Admita então $x \geq \frac{5}{3}$ neste passo. Logo, $|3x - 5| = 4 \Leftrightarrow$ $3x - 5 = 4$ que resolvendo tem-se $x = 3$.

Como neste passo $x \geq \frac{5}{3}$, $x = 3$ é uma solução da equação dada.

Passo 2: Ainda pela definição de módulo, vem:

$$|3x - 5| = -(3x - 5) = -3x + 5 \text{ se } 3x - 5 < 0 \text{ ou } x < \frac{5}{3}.$$

Logo, $|3x - 5| = 4 \Leftrightarrow -3x + 5 = 4$ que resolvendo tem-se $x = \frac{1}{3}$.

Como $\frac{1}{3} < \frac{5}{3}$, $x = \frac{1}{3}$ é também, solução da equação dada.

Portanto, o conjunto solução de $|3x - 5| = 4$ é $S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui! Para saber, procure, então, resolver os exercícios propostos a seguir, caso tenha dúvidas faça uma releitura cuidadosa dos conceitos ou resultados ainda não bem entendidos.

Exercícios propostos - 1

1) Determinar todos os números reais que satisfazem as desigualdades abaixo.

a) $|x| \geq 3$.

b) $\left|5x - \frac{1}{3}\right| < 2$.

c) $|3x - 2| < 0$.

d) $|3 - x| \geq 7$.

2) Determinar todos os números reais que satisfazem a equação: $|4x-3|=15$.

GLOSSÁRIO

Geometria analítica, também chamada **geometria de coordenadas** é o estudo da geometria através dos princípios da álgebra. Em geral, é usado o sistema de coordenadas cartesianas para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões, também em três ou mais dimensões.

O sistema de coordenadas cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas é constituído de duas retas perpendiculares ao plano. Uma é escolhida como sendo horizontal e a outra como vertical. Essas retas interceptam num ponto 0, chamado de origem. A reta horizontal é chamada eixo x, e a reta vertical é chamada eixo y. Uma escala numérica é colocada ao longo dos eixos x e y. Um ponto no plano pode ser representado de modo único no sistema de coordenadas por um par ordenado - (x, y), onde x é o primeiro número e y é o segundo.

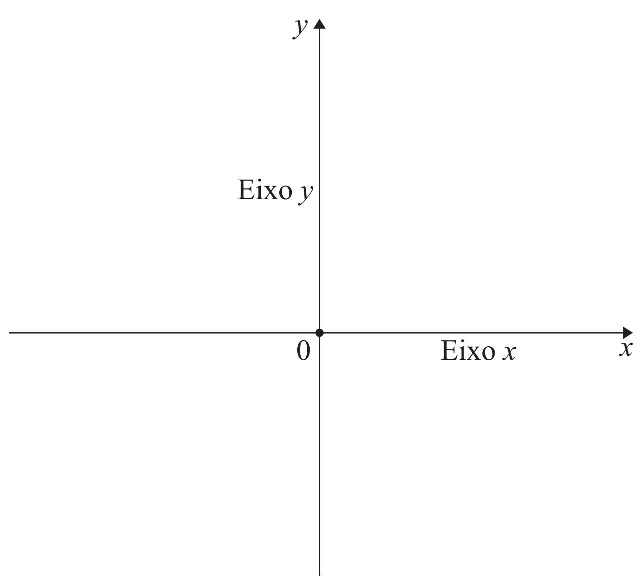


Figura 1.5 - O sistema de coordenadas cartesianas.

O primeiro número é representado no eixo x e o segundo no eixo y. No par ordenado (x, y), o x é chamado de **abscissa** ou coordenada x, o y é chamado de **ordenada** ou coordenada de y, x e y conjuntamente são chamados de coordenadas do ponto P. Veja os gráficos a seguir:

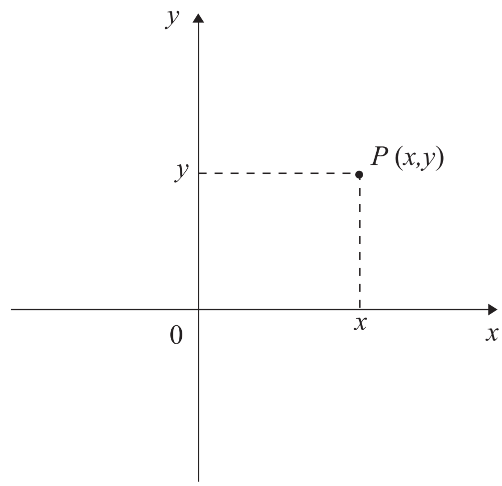


Figura 1.6 - Um par ordenado (x, y).

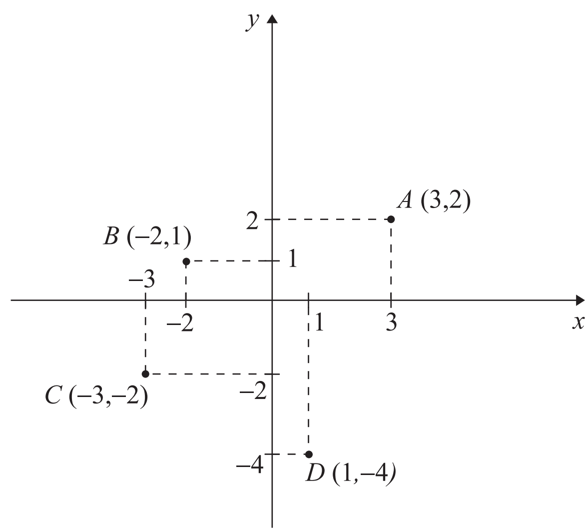


Figura 1.7 – Vários pontos do plano cartesiano.

Distância entre dois pontos

Definido um sistema de eixos coordenados, cada ponto do plano está associado a um par ordenado. Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Então, a distância entre esses dois pontos pode ser calculada mediante o uso da seguinte fórmula:

A distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no plano é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Veja a figura abaixo:

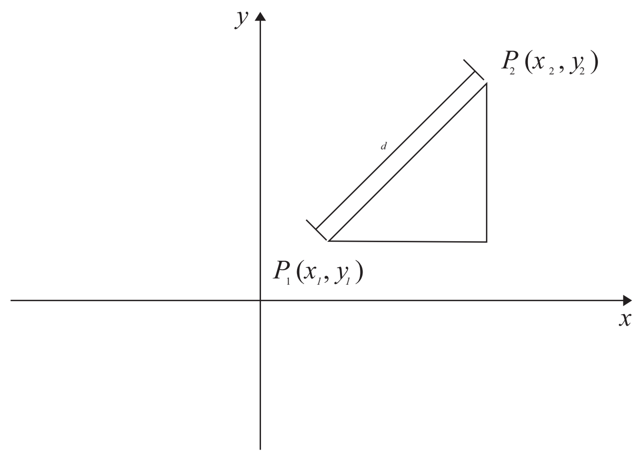


Figura 1.8

Exemplo 1.6 *Encontre a distância entre os pontos* $P_1(-3,4)$ *e* $P_2(2,-5)$.

Resolução: Temos

$x_1 = -3$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$ e $y_2 = -5$.

Pela fórmula (1), temos:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-3))^2 + ((-5)-4)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (-9)^2} \\ &= \sqrt{25+81} \\ &= \sqrt{106} \end{aligned}$$

A reta

A reta é o conjunto de pontos que seguem a mesma direção. Veja como encontrar agora a equação da reta.

Vamos considerar uma reta que faça um ângulo α (radianos) com o eixo x (abscissa) e que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$. Denotamos por

$m = \text{tg}\alpha$, que é conhecida como *inclinação da reta*. Seja (x, y) qualquer ponto da reta. Aplicando, a trigonometria, podemos facilmente obter:

$$\begin{aligned} m = \frac{y - y_0}{x - x_0} &\Rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \\ &\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \\ &\Rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \\ &\Rightarrow y = mx + (y_0 - mx_0). \end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta que passa pelo pontos $P_0(x_0, y_0)$ e tem inclinação m é dada por:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{PA}{P_0A} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

ou seja,

$$y = mx + b, \tag{2}$$

onde $m = \text{tg}\alpha$ e $b = -mx_0 + y_0$ é uma constante.

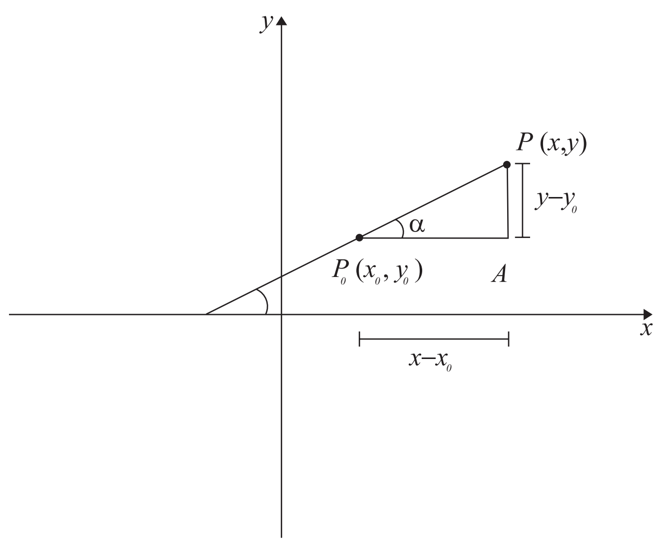


Figura 1.9

Exemplo 1.7 *Calcular a equação da reta que passa pelo ponto* $(2,1)$ *e tem inclinação* $m = 2$.

Resolução: É dado que $m = 2$ e $P_0(x_0, y_0) = (2,1)$. Substituindo esses valores na equação (2), obteremos:

$$1 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -3.$$

Logo, a equação da reta é:

$$y = 2x - 3.$$

Equação da reta que passa por dois pontos

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos de uma reta dada. A seguir obtemos a equação de uma reta que passa por esses pontos.

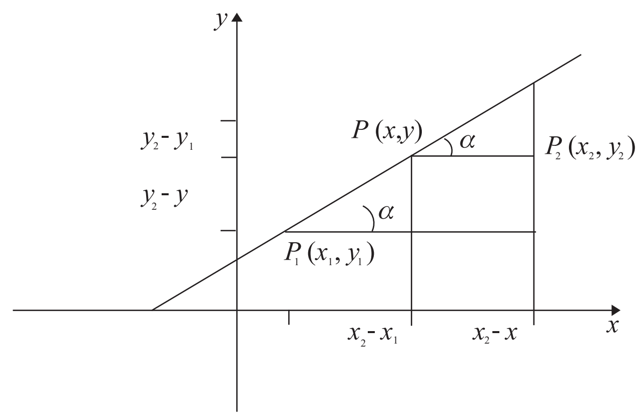


Figura 1.10

Da figura 1.10, obtemos:

$$m = tg\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{3}$$

Agora simplificando a expressão $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, obtemos

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \tag{4}$$

que representa a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Observação

(i) Pela expressão (3) *podemos observar que:*

$$m = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right),$$

ou seja, podemos sempre obter o valor da inclinação ou declividade através dos pontos dados.

(ii) Sejam m_1 *e* m_2 *declividade de duas retas, então:*

(a) As retas são paralelas quando $m_1 = m_2$.

(b) As retas são perpendiculares quando $m_1 \cdot m_2 = -1$.

(iii) A equação geral da reta é da forma

$$ax + by + c = 0,$$

onde a, b *e* c *são constantes e* a *e* b *são não nulos.*

(iv) A equação de uma reta é uma equação linear, reciprocamente, toda equação linear representa uma reta.

Exemplo 1.8 *Determine a equação da reta que passa pelos pontos* $(1,2)$ *e* $(3,-4)$. *Encontre também a inclinação da reta.*

Resolução: Pela fórmula (4), temos:

$$y - 2 = \frac{-4-2}{3-1}(x-1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{-6}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -3(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -3x + 3 + 2$$

$$\Rightarrow y = -3x + 5.$$

A inclinação é obtida pela fórmula (3), ou seja

$$m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Ângulo entre duas retas

Sejam $L_1 : y = m_1x + b_1$ e $L_2 : y = m_2x + b_2$ duas retas dadas.

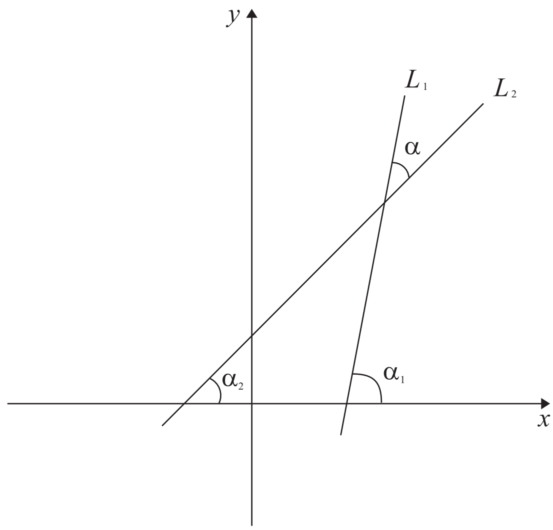


Figura 1.11

Seja α o ângulo formado entre duas retas L_1 e L_2. Então,

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} \qquad (\text{pela trigonometria})$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1. \tag{5}$$

Logo, o ângulo entre duas retas L_1 e L_2 é dado por

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \qquad m_1 m_2 \neq -1.$$

Observação *Já explicamos anteriormente que, quando* $m_1m_2 = -1$, *então as duas retas são perpendiculares.*

Exemplo 1.9 *Determine o ângulo entre as retas* $y = 2x - 3$ *e* $y = -3x + 4$.

Resolução: Sabemos que $m_1 = 2$ e $m_2 = -3$. Logo, o ângulo é dado por:

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2-(-3)}{1+(2)(-3)} = \frac{5}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1.$$

$$\Rightarrow m = \operatorname{tg} \alpha = -1.$$

$$\Rightarrow \alpha = arc\ tg(-1).$$

Exemplo 1.10 *Calcular a equação da reta que seja ortogonal (perpendicular) à reta* $y = -3x + 2$ *e que passa pelo ponto* $(2,-4)$.

Resolução: Sabemos que se duas retas são perpendiculares então $m_1 m_2 = -1$.

É dado que:

$$m_1 = -3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{(-3)} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}\cdot$$

Aplicando a fórmula (2), temos

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + b\cdot$$

Como a reta $y = \frac{1}{3}x + b$ passa pelo ponto $(2,-4)$, então:

$$-4 = \frac{1}{3}(2) + b \Rightarrow -4 - \frac{2}{3} = b \Rightarrow b = \frac{-14}{3}.$$

Logo, a equação da reta é:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \Rightarrow 3y = x - 14.$$

Distância de um ponto a uma reta

Dada a reta $y = mx + b$ e o ponto $P_0(x_0, y_0)$ que não passa pela reta. Precisamos encontrar a distância do ponto $P_0(x_0, y_0)$ à reta $y = mx + b$. Veja figura 1.12.

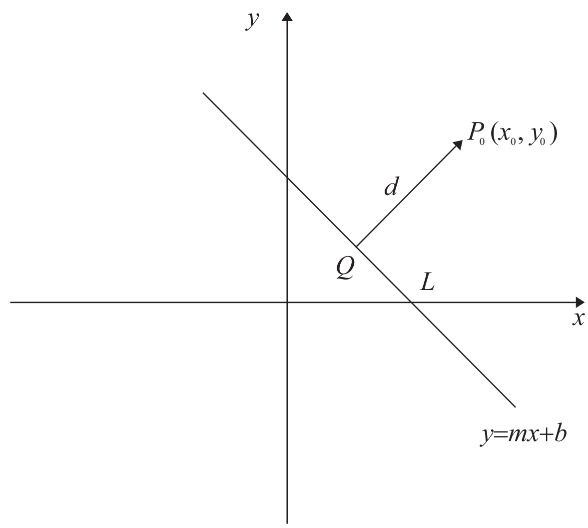


Figura 1.12

A distância do ponto $P_0(x_0, y_0)$ até à reta L, é dada por

$$d(P_0, L) = \frac{|y_0 - mx_0 - b|}{\sqrt{1+m^2}}. \qquad (6)$$

Exemplo 1.11 *Calcular a distância do ponto* $P(3,-2)$ *a reta* $y = -4x + 1$.

Resolução: Temos que $m = -4$, $x_0 = 3$ e $y_0 = -2$.
Logo,

$$d(P, L) = \frac{|-2-(-4)3-1|}{\sqrt{1+(-4)^2}} = \frac{|-2+12-1|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}}.$$

Interseção entre duas retas

Sejam $L_1 : y = m_1x + b_1$ e $L_2 : y = m_2x + b_2$ duas retas com $m_1 \neq m_2$. Vamos supor que estas retas interceptam-se no ponto Q.

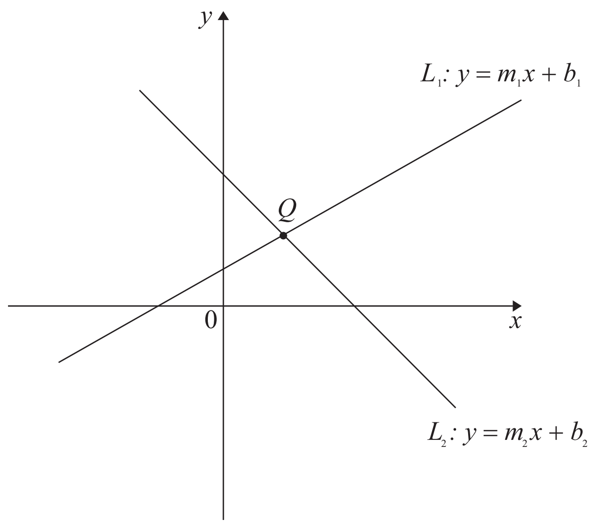


Figura 1.13

Para encontrar as coordenadas do ponto Q, simplesmente precisamos resolver as equações:

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2. \end{cases}$$

Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 1.12 *Encontrar os pontos de interseção das retas*

$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Resolução: Veja o gráfico abaixo:

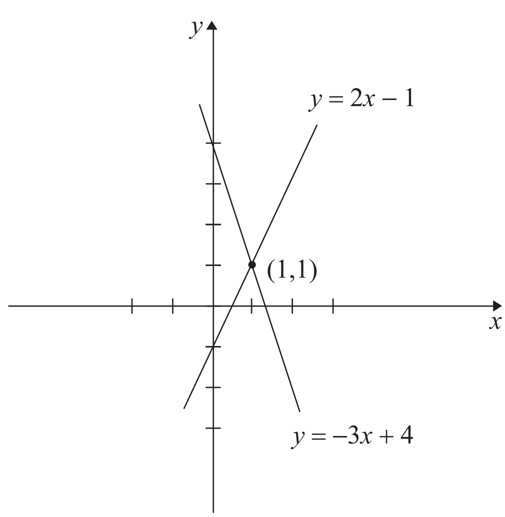


Figura 1.14

Resolvendo as equações dadas obteremos

$$-3x+4=2x-1$$
$$\Rightarrow -5x=-5$$
$$\Rightarrow x=1.$$

Agora,

$$y=2x-1 \Rightarrow y=2(1)-1 \Rightarrow y=1.$$

Logo, o ponto de interseção é dado por (1,1).

Exercícios propostos – 2

1) Determine a equação da reta usando os seguintes dados:
   a) que passa pelo ponto $(2,1)$ e tem inclinação de –2.
   b) que passa pelo ponto $(3,-2)$ e tem inclinação de 3.
   c) que passa pelos pontos $(3,4)$ e $(2,-3)$.
   d) que passa pelos pontos $(-2,3)$ e $(1,5)$.

2) Encontre a distância entre ponto e reta:
   a) $y=4x-3$; ponto $(2,-3)$.
   b) $y=2x+5$; ponto $(4,-2)$.
   c) $y-2x+1=0$; ponto $(2,4)$.

3) Encontre a inclinação das seguintes retas:
   a) $2y+4x+3=0$.
   b) $4x-3y+2=0$.

4) Calcule o ângulo entre as duas retas:
   a) $y=4x+3$ e $y=3x$.
   b) $y=-2x+1$ e $y=x+3$.

5) Encontre os pontos de interseção das seguintes retas:
   a) $2x-3y+1=0$ e $y=3x+5$.
   b) $3x-2y-3=0$ e $4x-2y+1=0$.

Parábola

Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano, eqüidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Consideremos uma reta L e um ponto F não pertencente a reta L. Qualquer ponto P pertencente à parábola, se e somente se

$$d(P,F) = d(P,P'),$$

onde P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta L.

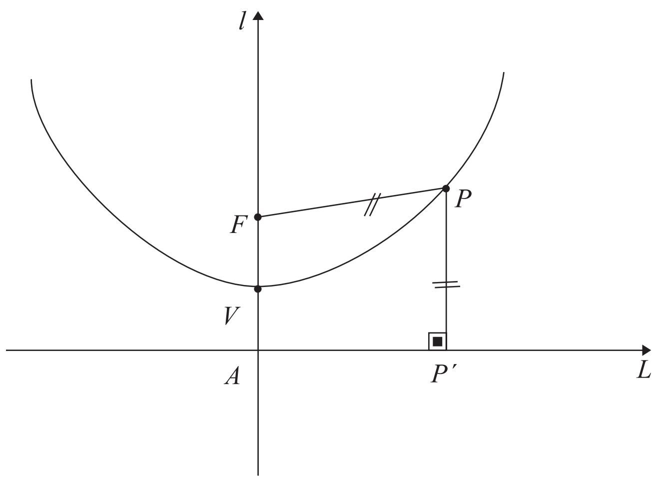


Figura 1.15

- **Elementos da Parábola**

Conforme a figura 1.15, temos os seguintes elementos da parábola:

Foco: é o ponto F.

Diretriz: é a reta L.

Eixo: é a reta que passa por F e é perpendicular a L. É fácil ver, pela própria definição de parábola, que esta curva é simétrica em relação ao seu eixo.

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Equação reduzida da parábola

Seja F o foco e $L = NM$ a diretriz da parábola. Traçar FN perpendicular de F sobre a diretriz. Considere FN, o eixo da parábola como sendo eixo x. Seja V o ponto médio de NF. Como $NV = VF$, pela definição V pertence a parábola. Considere V como origem e a linha VY perpendicular a NF como sendo eixo de y.

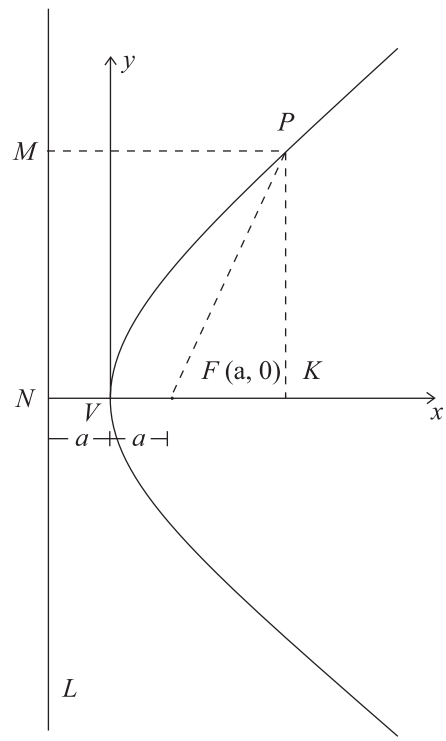


Figura 1.16

Seja $NF = 2a$, logo $VF = a$ e $F = (a, 0)$, e a equação de diretriz NM é $x = -a$.

Seja $P(x, y)$ um ponto de parábola. Então

$$PM = NK = NV + VK = a + x.$$

Pela definição,

$$MP = PF$$
$$\Rightarrow MP^2 = PF^2 = FK^2 + PK^2$$
$$\Rightarrow (a+x)^2 = (x-a)^2 + (y-0)^2$$
$$\Rightarrow a^2 + x^2 + 2ax = x^2 + a^2 - 2ax + y^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4ax$$

Logo, $y^2 = 4ax$ é a equação da parábola, onde

- (0,0) é **vértice** e (a,0) é o foco da parábola;
- $x = -a$ é a **equação da diretriz** da parábola;
- o eixo dos x sendo **eixo da parábola**.

Quando o eixo da parábola é o eixo dos y, temos a seguinte figura:

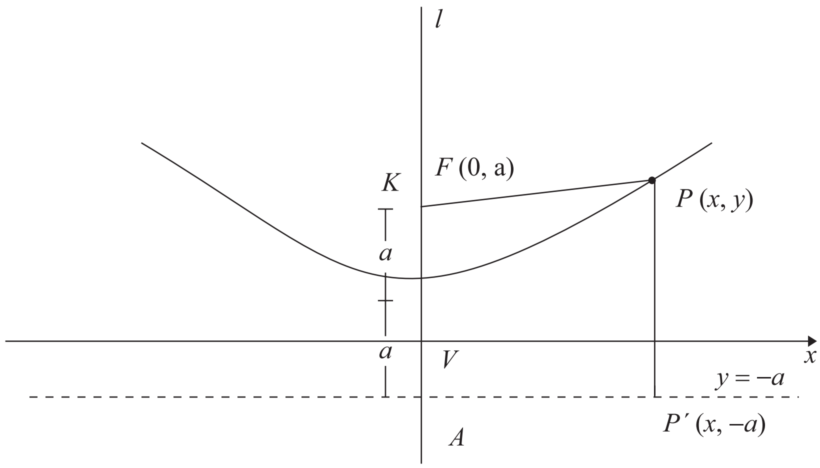


Figura 1.17

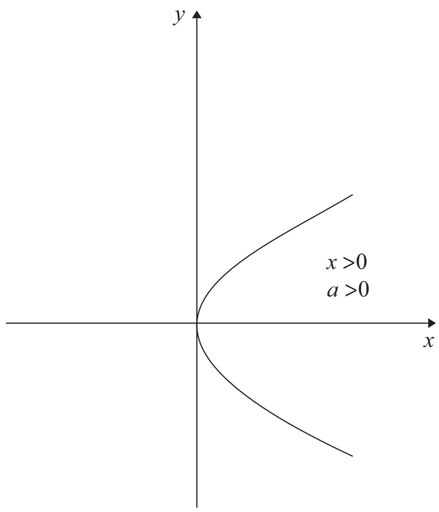
Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F(0, a)$ e diretriz $y = -a$ obteremos, de forma análoga ao caso anterior, a equação reduzida da parábola

$$x^2 = 4ay\,.$$

Observação

(i) O número real $a \neq 0$ nas equações reduzidas da parábola é chamado parâmetro da parábola.

(ii) Da equação $y^2 = 4ax$ podemos observar que $a\,x \geq 0$, o parâmetro a e x abscissa de P tem sinais iguais ($a\,x = 0$ se $x = 0$) e conseqüentemente, se $a > 0$ a parábola tem abertura ao lado direito e se $a < 0$ a parábola tem abertura ao lado esquerdo. Veja as figuras abaixo.



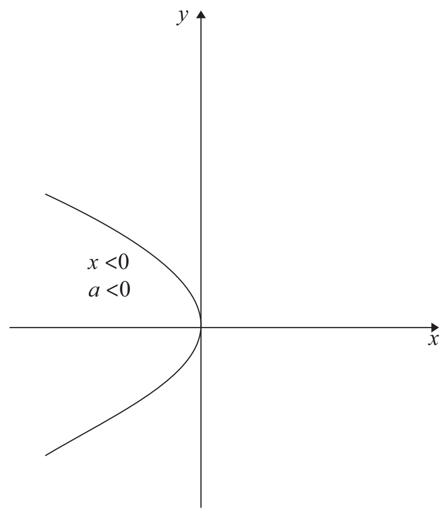
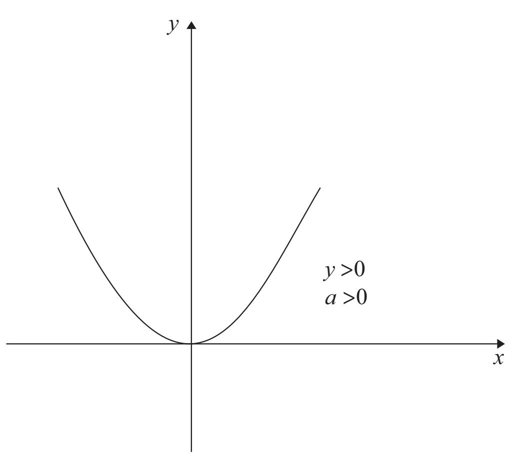


Figura 1.18: Gráficos da parábola quando $y^2 = 4ax$.

(iii) O gráfico da equação $x^2 = 4ay$ é simétrico em relação ao eixo dos y, pois substituindo x por $-x$ a equação não se altera, isto é, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, o ponto $(-x, y)$ também pertence. Da análise do gráfico $x^2 = 4ay$ concluímos que se $a > 0$, a parábola tem abertura para cima e se $a < 0$ a parábola tem abertura para baixo. Veja a figura a seguir:



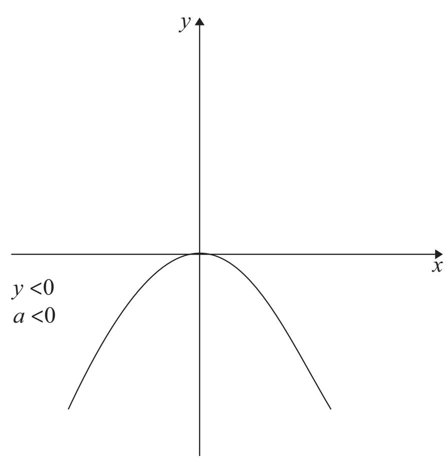


Figura 1.19: Gráficos da parábola quando $x^2 = 4ay$.

Observação *Quando V = (0,0), dizemos que a parábola está na posição padrão. Nesse caso a equação da parábola é conhecida como **equação reduzida**.*

Equação geral da parábola

Supondo que $V = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, temos dois casos a ser analisadas.

1º Caso: *Quando o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos* x.

Neste caso a equação da parábola padrão é dada por

$$(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0).$$

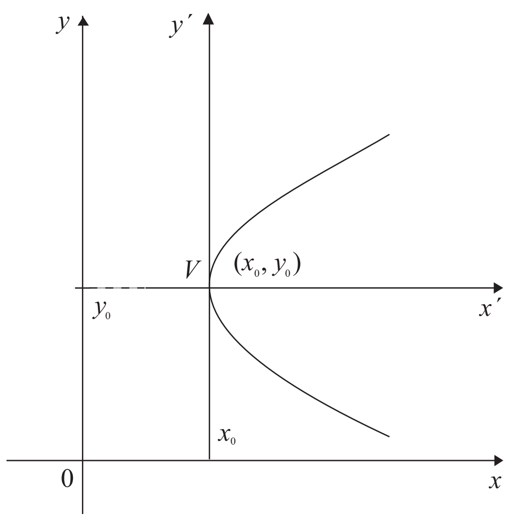


Figura 1.20

Simplificando a equação $(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$, obtemos

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = 4ax - 4ax_0$$

$$\Rightarrow y^2 + 4ax + (-2y_0)y + (y_0^2 + 4ax_0) = 0$$

Ajustando os coeficientes, podemos escrever a equação, acima de uma forma simplificada,

$$y^2 + bx + cy + d = 0,$$

que é ***a equação geral da parábola***

Observação *A equação geral da parábola também pode ser escrita numa forma implícita, dada por*

$$x = py^2 + qy + r, \quad p \neq 0$$

2º Caso: *Quando o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y*

Neste caso a equação da parábola padrão é dada por

$$(x - x_0)^2 = 4a(y - y_0).$$

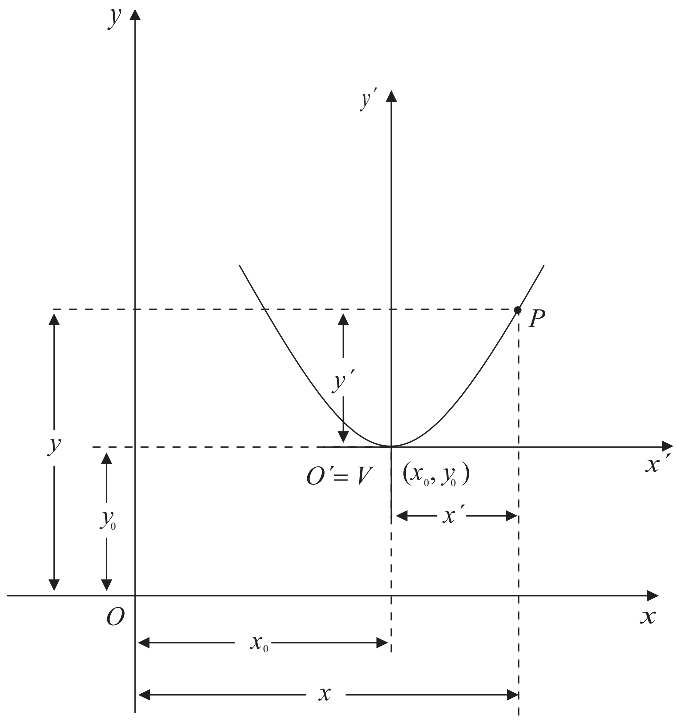


Figura 1.21

Analogamente, simplificando a equação $(x - x_0)^2 = 4a(y - y_0)$, e ajustando os coeficientes, podemos escrever a ***equação geral da parábola***

$$x^2 + bx + cy + d = 0.$$

Observação *Neste caso, a forma implícita da equação geral da parábola é dada por*

$$y = px^2 + qx + r, \quad p \neq 0$$

Exemplo 1.13 *Determinar a equação da parábola de vértice* $V(2,-1)$, *sabendo que* $y - 2 = 0$ *é a equação da sua diretriz.*

Resolução: Sabemos que a equação da parábola é dada por

$$(x - x_0)^2 = 4a(y - y_0).$$

Neste caso temos $(x_0, y_0) = (2, -1)$ e $a = -3$. A diretriz é acima do vértice da parábola. Veja o gráfico abaixo:

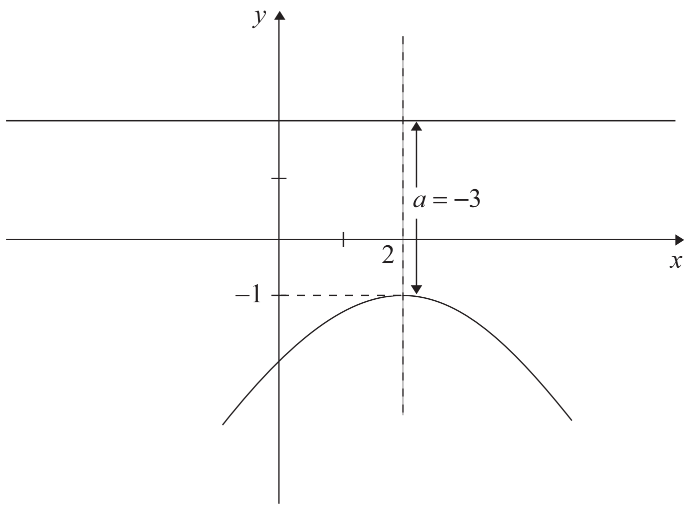


Figura 1.22

Logo, a equação da parábola é dada por

$$(x-2)^2 = -4 \cdot 3(y+1)$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = -12y - 12$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 12y - 4x + 16 = 0.$$

Exemplo 1.14 *Determinar a equação da parábola de foco* $F(-1,1)$ *e* $x = 3$ *a equação da diretriz.*

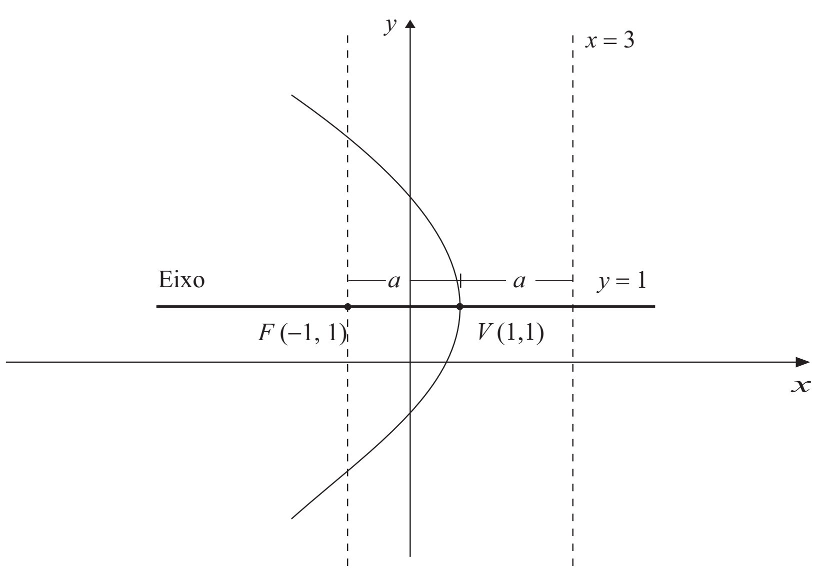


Figura 1.23

Resolução: Dado foco $F(-1,1)$ e diretriz $x = 3$, podemos encontrar o vértice, que é $V\left(x_0, y_0\right) = \left(1,1\right)$. Logo, a equação da parábola é dada por

$$
\begin{aligned}
& (y - y_0)^2 = 4a(x - x_0), \quad (a < 0) \\
\Rightarrow\ & (y - 1)^2 = 4(-2)(x - 1) \\
\Rightarrow\ & y^2 - 2y + 1 = -8x + 8 \\
\Rightarrow\ & y^2 + 8x - 2y - 7 = 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.15 *Estabelecer a equação da parábola sabendo que vértice* $V\left(2,1\right)$ *é eixo paralelo ao eixo dos* x *, passando pelo ponto* $P\left(-1,-2\right)$.

Resolução: Veja o gráfico abaixo:

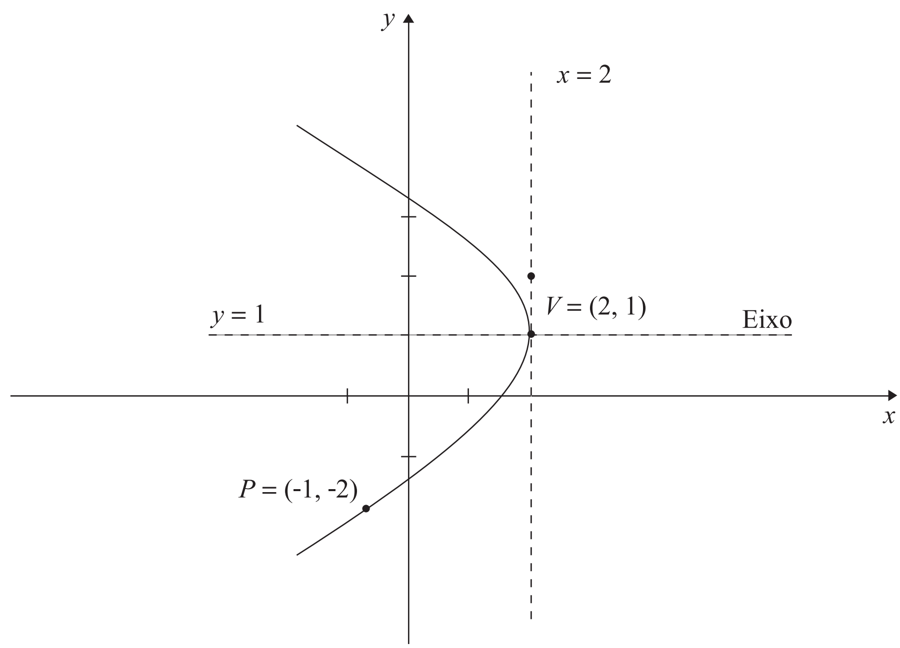


Figura 1.24

Como o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x , então a equação é dada por

$$
\begin{aligned}
& (y - y_0)^2 = 4a(x - x_0), \quad (a < 0) \\
\Rightarrow\ & (y - 1)^2 = 4a\,(x - 1)
\end{aligned}
$$

Como a parábola passa pelo ponto $P\left(-1,-2\right)$, então

$$\begin{aligned}
&(-2-1)^2 = 4a(-1-2), \quad (a<0)\\
\Rightarrow\ &9 = 4a(-3)\\
\Rightarrow\ &a = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação é dada por

$$\begin{aligned}
&(y-1)^2 = 4\left(\frac{-3}{4}\right)(x-2)\\
\Rightarrow\ &y^2-2y+1 = -3x+6\\
\Rightarrow\ &y^2+3x-2y-5 = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.16 *Determinar o vértice, um esboço do gráfico, o foco e a equação da diretriz da parábola* $y^2+4y-2x+2=0$.

Resolução: É dado que

$$\begin{aligned}
&y^2+4y-2x+2=0\\
\Rightarrow\ &y^2+4y+4-4-2x+2=0\\
\Rightarrow\ &(y+2)^2-2-2x=0\\
\Rightarrow\ &(y+2)^2=2(x+1)\\
\Rightarrow\ &(y+2)^2=4\left(\frac{1}{2}\right)(x+1).
\end{aligned}$$

Vértice $=V(-1,-2)$, $a=\frac{1}{2}$, foco $=F\left(-\frac{1}{2},-3\right)$ e diretriz $x=-\frac{3}{2}$.

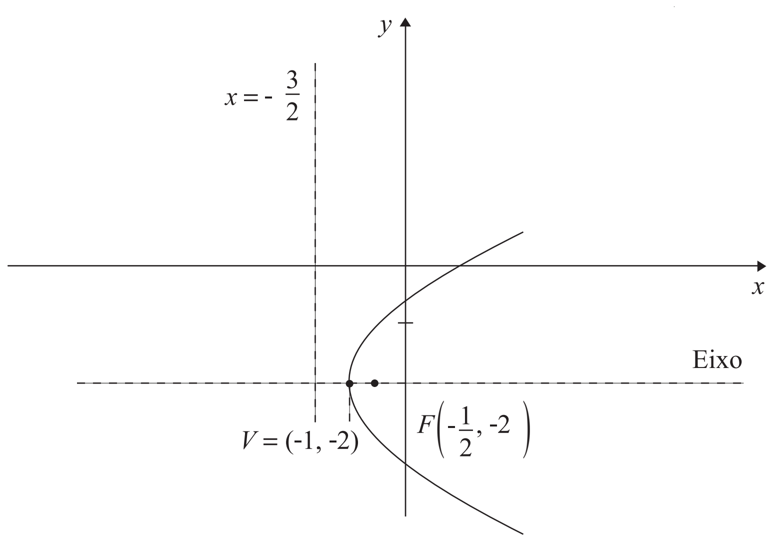


Figura 1.25

Exercícios propostos – 3

1) Para cada uma das parábolas, construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz:

a) $x^2 = 4y$

b) $x^2 - 8y = 0$

c) $y^2 = -8x$

d) $y^2 = x$

2) Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola que satisfaça as condições:

a) Vértice $V(0,0)$; diretriz $y = -1$.

b) Vértice $V(-2,3)$; diretriz $x = -3$.

c) Foco $F(-7,3)$; diretriz $x = -2$.

d) Foco $F(3,-1)$; diretriz $y = 1$.

3) Determinar a equação reduzida, o vértice, o focoe uma equação da diretriz. Esboçar o gráfico.

a) $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$.

b) $y^2 - 16y + 8x + 44 = 0$.

c) $x^2 - 12y + 20 = 0$.

d) $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$.

Elipse

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

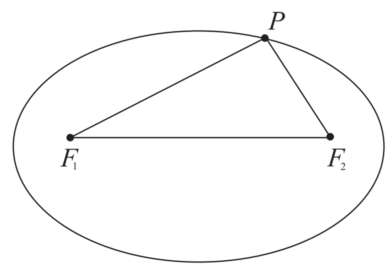


Figura 1.26

Consideremos no plano dois pontos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Vamos considerar P qualquer ponto da elipse, então chamando de $2a$ a constante de definição, um ponto P pertence à elipse se, e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

onde a é um número real positivo. Obviamente $2a > 2c$ pela propriedade de triângulo.

- **Elementos da Elipse**

Inicialmente apresentaremos a equação reduzida da elipse. Vamos considerar a figura abaixo com suas respectivas notações.

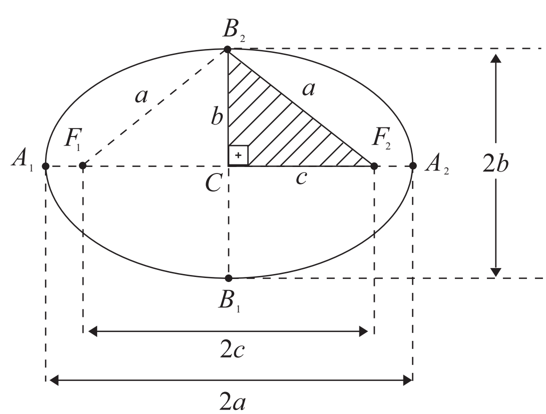


Figura 1.27

Conforme figura anterior, temos os seguintes elementos:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (este segmento contém os focos).

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.

Vértice: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

Pela figura 1.27 é imediato que $B_2F_2 = a$, pois $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ (definição da elipse) e $B_2F_1 = B_2F_2$. Logo, do triângulo retângulo B_2CF_2 vem: $a^2 = b^2 + c^2$.

Esta igualdade mostra que $b < a$ e $c < a$.

Equação da elipse

Seja a elipse de centro $C(0,0)$. Consideremos dois casos:

1º Caso. *O eixo maior está sobre o eixo dos x*

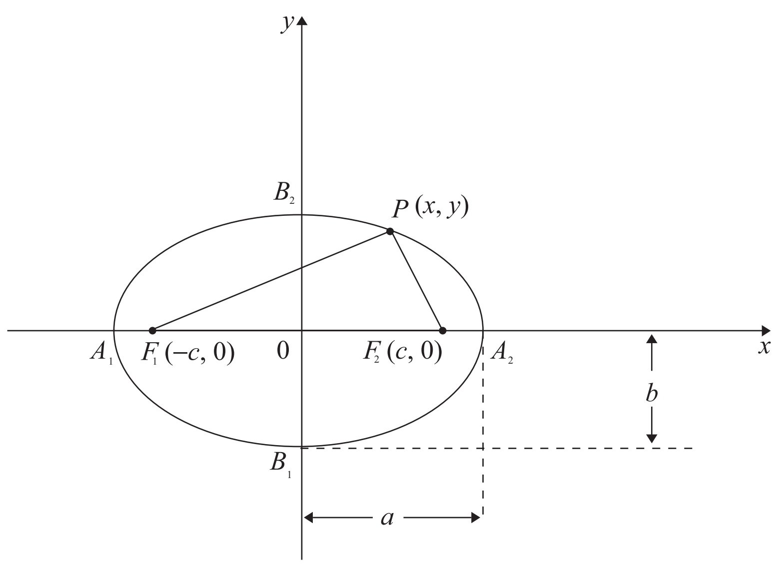


Figura 1.28

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Pela definição da elipse, tem-se

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a,$$

ou,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}\right)^2$$

Após, várias simplificações, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, então

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, vem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação reduzida para este caso.

2º Caso. *O eixo maior está sobre o eixo dos y*

Observando abaixo, com procedimento análogo ao primeiro caso, obtemos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

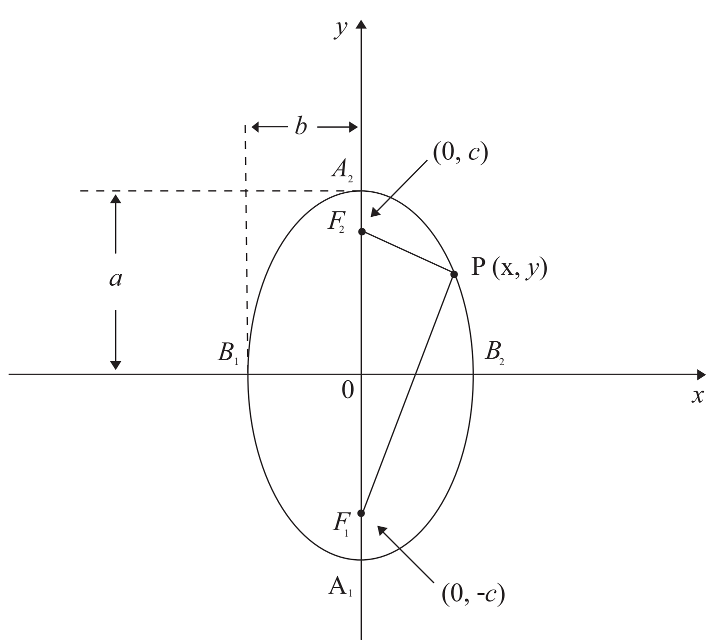


Figura 1.29

Observação

(i) Como em toda elipse tem $a > b$ *(ou* $a^2 > b^2$*), para saber se a elipse tem seu eixo maior sobre Ox ou sobre Oy, basta observar onde está o maior denominador (* a^2 *) na sua equação reduzida. Se esse for denominador de* x^2*, ou eixo maior está sobre Ox, caso contrário, estará sobre Oy.*

(ii) Considere uma elipse de centro, fora da posição padrão, isto é, $C = (x_0, y_0)$*. Neste caso, a equação geral da elipse é dada por*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde os eixos da elipse são paralelos os eixos x *e* y*.*

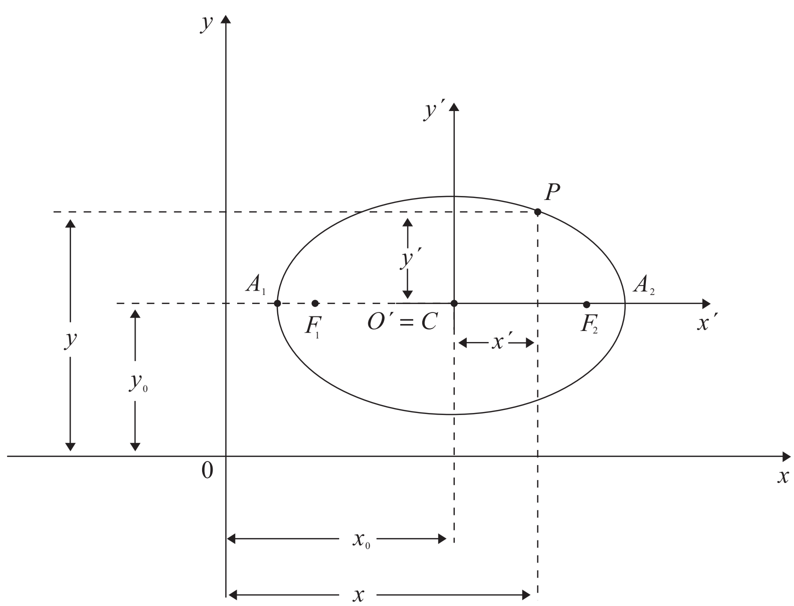


Figura 1.30

(iii) Qualquer elipse cujos eixos estão sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles, sempre pode ser representada por uma equação geral, dada por

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0,$$

com a *e* b *de mesmo sinal.*

Exemplo 1.17 *Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto* $(2,0)$ *e a medida do eixo maior é* 6. *Determinar a sua equação.*

Resolução: Como foco dado é no eixo dos x e $C(0,0)$, então a equação desta elipse é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

É dada a medida do eixo maior: $6=2a \Rightarrow a=3$. Também é dado que $c=2$. Agora, $a^2=b^2+c^2$ implica que $9=b^2+4$, ou seja, $b=\pm\sqrt{5}$.

Logo,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

é a equação desejada da elipse. Veja figura a seguir.

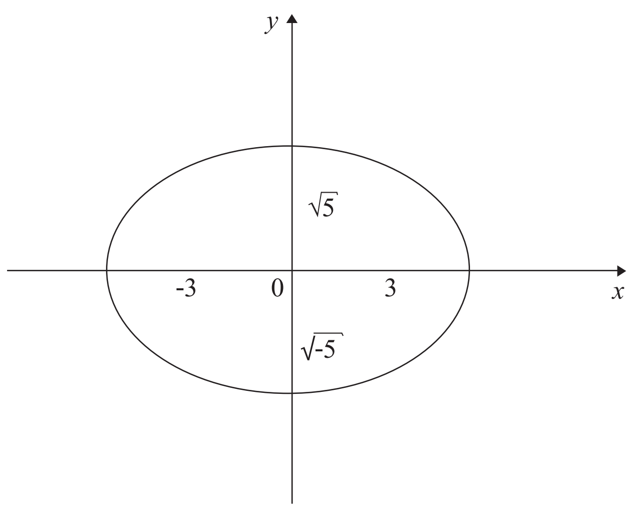


Figura 1.31

Exemplo 1.18 *Determinar o centro, os vértices e os focos da elipse de equação*

$$9x^2+16y^2-36x+96y+36=0\,.$$

Resolução: Agora,

$$
\begin{aligned}
& 9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) + 16\left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 36 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-2\right)^2 - 36 + 16\left(y+3\right)^2 - 144 + 36 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-2\right)^2 + 16\left(y+3\right)^2 = 144 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-2\right)^2 + 16\left(y+3\right)^2 = 12^2 \\
\Rightarrow\ & \frac{\left(x-2\right)^2}{16} + \frac{\left(y+3\right)^2}{9} = 1,
\end{aligned}
$$

que é a forma padrão da elipse do eixo maior paralelo ao eixo dos x.

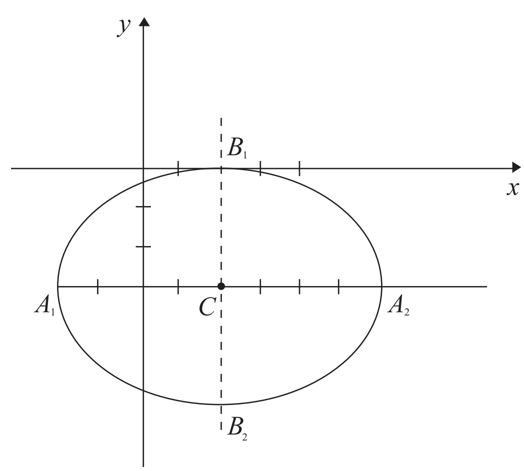


Figura 1.32

Isto implica que o centro da elipse é (2,-3),
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ e $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Agora,
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}$. Daí concluímos que os focos da elipse são $F_1\left(4-\sqrt{7},-3\right)$ e $F_2\left(4+\sqrt{7},-3\right)$.

Exemplo 1.19 *Encontre a equação da elipse com semi eixos,* $a = 3$ *e* $b = 2$ *com centro no ponto* $\left(1,2\right)$.

Resolução: A equação da elipse com centro em $\left(x_0, y_0\right)$ é dada por

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x-1\right)^2}{3^2}+\frac{\left(y-2\right)^2}{2^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-2x+1}{9}+\frac{y^2-4y+4}{4}=1$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(x^2-2x+1\right)+9\left(y^2-4y+4\right)=36$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2+9y^2-8x-36y+4+36=36$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$$

é a equação da elipse.

Circunferência ou círculo

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo desse plano é constante. Esse ponto fixo é chamado, ***centro****, e a distância fixa é chamada,* ***raio*** *da circunferência.*

Circunferência é um caso particular da elipse. Quando $a = b$, todas as equações da elipse passam ser equações da circunferência.

Equação da circunferência ou círculo

- **Centro na origem:** $C(0,0)$, $a = b = r$

Neste caso a equação da circunferência é dada por

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

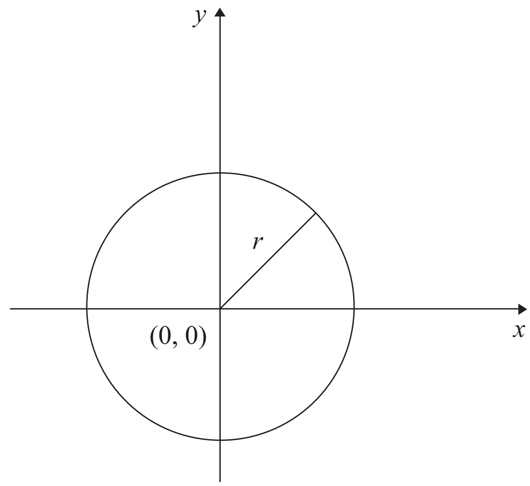


Figura 1.33

- **Centro da circunferência:** $C(x_0, y_0)$, $a = b = r$

Neste caso a equação da circunferência é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

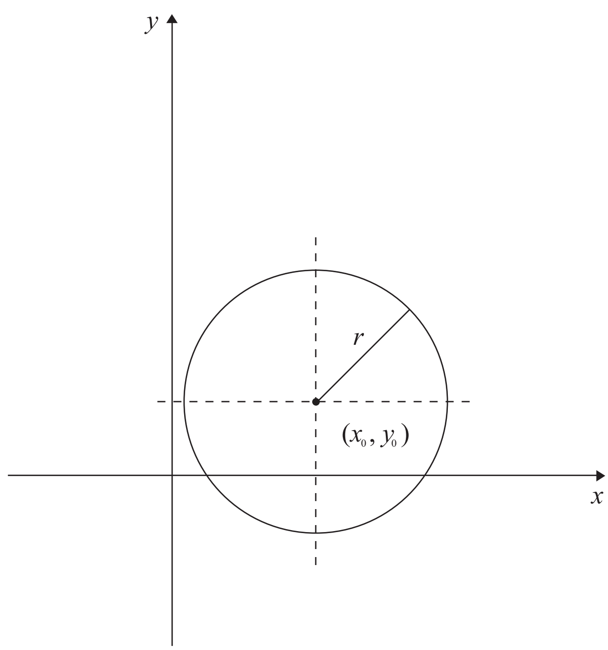


Figura 1.34

Observação *Após simplificação, a equação dada acima pode ser escrita da seguinte forma:*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 ,$$

que é a ***equação geral da circunferência*** *ou* ***círculo****.*

Exemplo 1.20 *Determinar a equação do círculo com centro no ponto de interseção das retas* $y = 2x - 1$ *e* $y = x + 1$ *e raio* $r = 2$.

Resolução: Inicialmente, precisamos encontrar o ponto de interseção das retas dadas

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$2x - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$
$$y = 2x - 1 \quad \Rightarrow y = 2(2) - 1 \quad \Rightarrow y = 3.$$

Logo, o centro do círculo é o ponto de interseção das retas, ou seja, $C(2,3)$.

Sabemos que a equação da circunferência no centro (x_0, y_0) e raio r é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$\Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

que é a equação do círculo.

Exercícios propostos – 4

1) Determinar a equação do círculo com centro no ponto $(1,2)$ e raio igual a $r = 3$.

2) Determinar os pontos de interseção entre as seguintes curvas:
a) A reta $y = 2x$ e o círculo $x^2 + y^2 = 4$.
b) A parábola $x^2 = 4y$ e o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

3) Encontrar a equação do círculo com centro no ponto de interseção das retas $y = x + 2$ e $y = 2x + 1$ e raio $r = 2$.

4) Encontre a equação do círculo que passa pelos pontos $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,3)$.

5) Esboçar o gráfico das seguintes curvas e determinar os vértices e os focos:

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

b) $9x^2+4y^2=36$.

c) $x^2+4y^2=4$.

6) Determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas. Esboçar o gráfico:

a) Focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$, eixo maior igual a 8.

b) Focos $F_1(0,-2)$ e $F_2(0,2)$, eixo menor igual a 6.

c) Focos $F(0,\pm 2)$ e vértices $A(0,\pm 3)$.

d) Vértices $A(0,\pm 4)$ e passando pelo ponto $P(1,2)$.

7) Determinar a equação reduzida, o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos. Esboçar o gráfico.

a) $9x^2+4y^2-54x+16y+61=0$.

b) $16x^2+y^2+64x-4y+52=0$.

c) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$.

Hipérbole

*Hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano cuja **diferença das distâncias**, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.*

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1,F_2)=2c$ e um número real positivo a, de modo que, $2a<2c$.

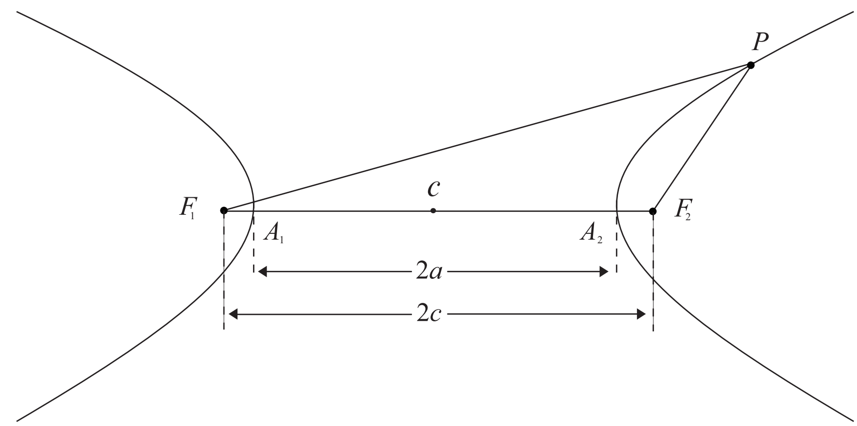


Figura 1.35

Chamamos de $2a$ a constante de definição, um ponto P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \qquad (7)$$

Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação (7), um ponto P está na hipérbole se, e somente se,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a\,. \qquad (8)$$

- **Elementos da hipérbole**

Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.
Vértices: são os pontos A_1 e A_2.

Equação reduzida da hipérbole

Seja a hipérbole de centro $C(0,0)$. Consideremos dois casos:

1º Caso. *O eixo real está sobre o eixo dos x*

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Pela definição 1.4, tem-se

$$|\,d(P,F_1) - d(P,F_2)\,| = 2a\,,$$

ou, em coordenadas

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a\,.$$

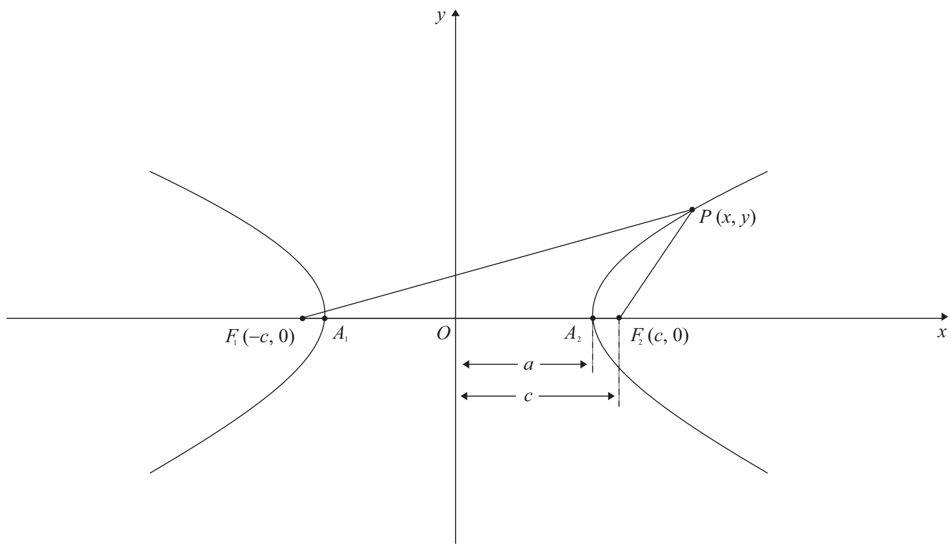


Figura 1.36

Vamos encontrar agora a equação da hipérbole. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que

$$F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } F_2P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Substituindo estes valores em (8), obtemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado os termos anteriores, temos que

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2xc + \cancel{y^2}$$

$$= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2xc + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado cada termo da identidade acima ,obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x-c\right)^2 + a^2y^2$$
$$= a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$\Rightarrow \quad \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Observamos através da figura 1.36, que

$$2c > \left|F_1Q - F_2Q\right| = 2a$$
$$\Rightarrow \quad c > a$$
$$\Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R} \text{ tal que } b^2 = c^2 - a^2, \text{ ou seja, } a^2 + b^2 = c^2.$$

Portanto, a equação da hipérbole é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

que é a **equação reduzida** para este caso.

2º Caso. *O eixo real está sobre o eixo dos y*

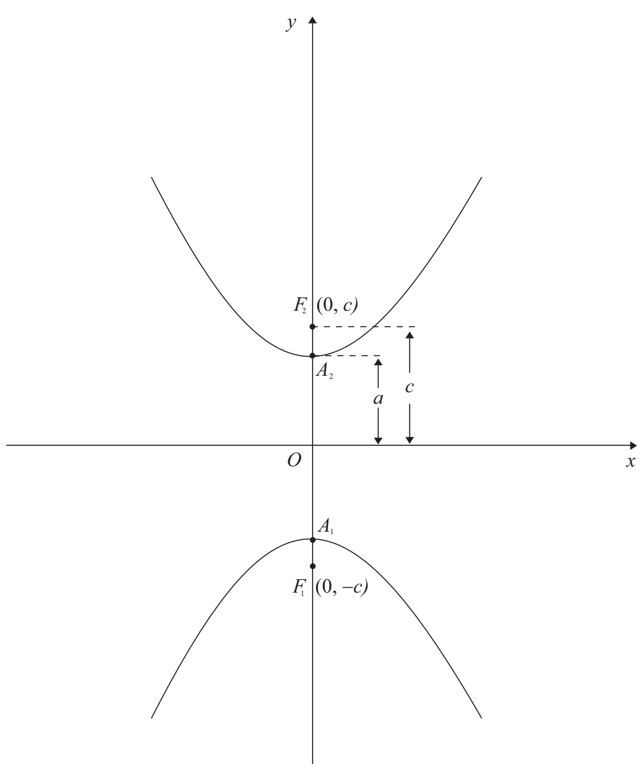


Figura 1.37

Observando a figura acima, com procedimento análogo ao 1º caso, obtemos a equação reduzida

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Equação geral da hipérbole

Quando o centro da hipérbole C não é origem, ou seja, $C = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, neste caso a equação geral da hipérbole pode ser representada de duas formas.

1º Caso. *O eixo real é paralelo ao eixo dos x*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

2º Caso. *O eixo real é paralelo ao eixo dos y*

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Simplificando e ajustando os coeficientes, nas equações dadas acima, podemos ter ***uma equação geral da hipérbole*** dada por

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0,$$

onde a, b, c, d e f são constantes, com a e b de sinais contrários.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos relacionados com hipérbole.

Exemplo 1.21 *Obter a equação reduzida resultante de uma translação de eixos, classificar os elementos e esboçar o gráfico da equação*

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$$

Resolução: Temos que

$$
\begin{aligned}
& 9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - 4\left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) - 43 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-1\right)^2 - 9 - 4\left(y+2\right)^2 + 16 - 43 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-1\right)^2 - 4\left(y+2\right)^2 = 36 \\
\Rightarrow\ & \frac{\left(x-1\right)^2}{4} - \frac{\left(y+2\right)^2}{9} = 1.
\end{aligned}
$$

Assim, temos:

Centro: $C\left(1,-2\right)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ (valor positivo)

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ (valor positivo)

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Focos: $F\left(1 \pm \sqrt{13}, -2\right)$

Vértices: $A_1(-1,-2)$, $A_2(3,-2)$

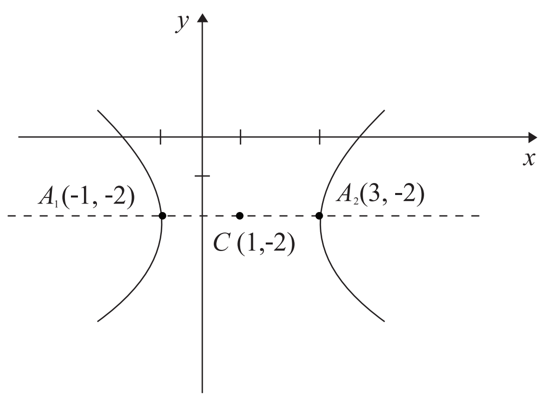


Figura 1.38

Exemplo 1.22 *Determinar a equação da hipérbole de vértice* $A_1\left(2,-3\right)$ *e* $A_2\left(6,-3\right)$, *sabendo que* $F\left(8,-3\right)$ *é um de seus focos.*

Resolução: Colocando os pontos dados no plano, teremos a seguinte figura:

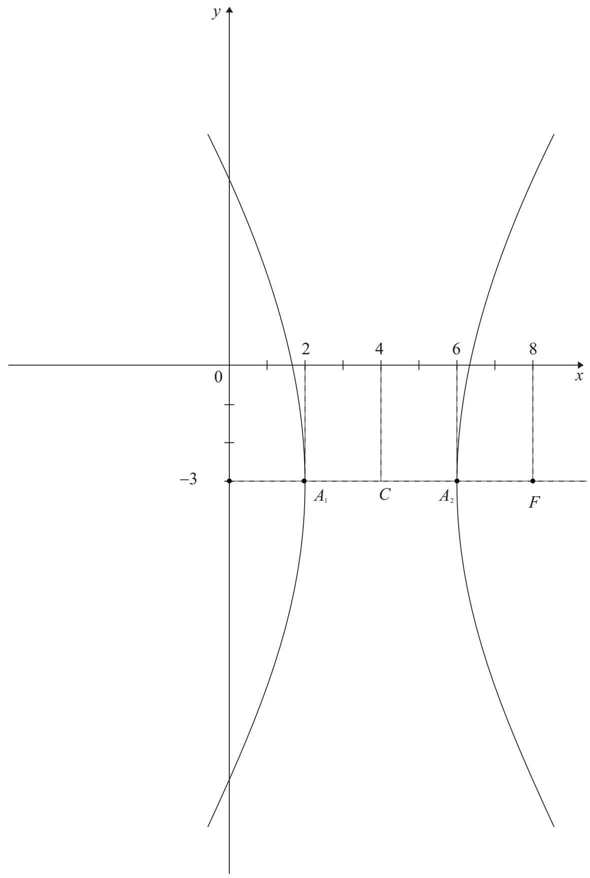


Figura 1.39

Agora,

$$2c = 8 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

e

$$2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} & 16 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow & 16 = 4 + b^2 \\ \Rightarrow & 12 = b^2 \\ \Rightarrow & b = \pm\sqrt{12}. \end{aligned}$$

Também podemos verificar, facilmente, que o centro é $C(4,-3)$. Sabemos que a equação da hipérbole é dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Substituindo os valores correspondentes, obtidos através da figura na equação acima, obtemos

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{12}=1$$

$$\Rightarrow (x^2-8x+16)3-(y^2-6y+9)=12$$

$$\Rightarrow 3x^2-24x+48-y^2+6y-9=12$$

$$\Rightarrow 3x^2-y^2-24x+6y+27=0.$$

Portanto, a equação da hipérbole é dada por

$$3x^2-y^2-24x+6y+27=0.$$

Exercícios propostos – 5

1) Determine os focos, os vértices e esboce as hipérboles cujas equações são:

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

c) $4x^2-9y^2+36=0$

d) $x^2-y^2=1$.

2) Determine uma equação da hipérbole:

a) Focos: $F_1(3,0)$ e $F_2(-3,0)$ e vértices: $A_1(2,0)$ e $A_2(-2,0)$.

b) Focos: $F_1(2,-2)$ e $F_2(-2,-2)$ e vértices: $A_1(1,-2)$ e $A_2(-1,-2)$.

3) Determine centro, os vértices e os focos das hipérboles dadas:

a) $7x^2-9y^2+28x+54y-116=0$.

b) $x^2-4y^2+6x+24y-31=0$.

c) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

Seções cônicas

Sejam duas retas *r* e *s* concorrentes em O (origem) e não perpendiculares. Consideremos fixa a reta e façamos *s* girar 360º graus em torno de *r* mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta *s* gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O (Figura 1.40).

A reta *s* é chamada geratriz da superfície. Chama-se seção cônica, ou simplesmente cônica, ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

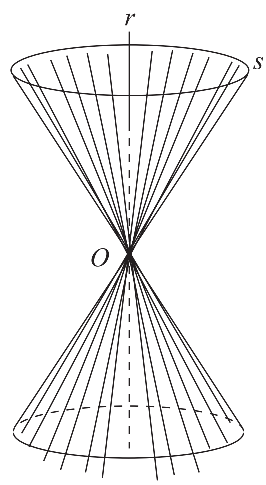


Figura 1.40

Vamos seccionar a superfície cônica através de um plano π. Obtemos várias curvas planas conforme figura 1.41 abaixo:

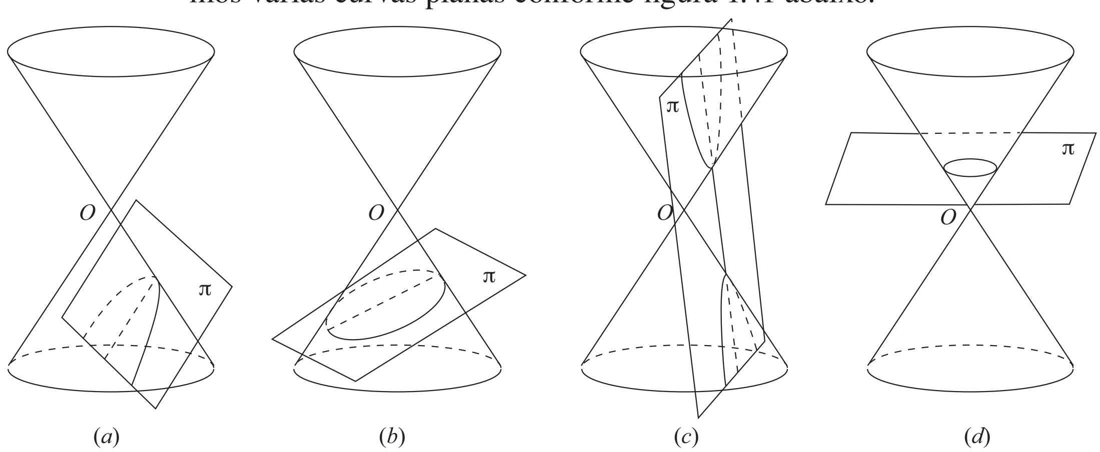


Figura 1.41

É importante observar que as cônicas* são curvas planas e, portanto, tudo o que dizemos sobre **parábola**, **elipse**, **circunferência** e **hipérbole** se passa num plano.

GLOSSÁRIO

Cónicas* são curvas geradas pela intersecção de um plano com um cone.

Vale destacar...

Quando uma superfície cônica é secionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a cônica será:

*a) uma **parábola**, se π paralelo a uma geratriz da superfície (Figura 1.41 (a));*

*b) uma **elipse**, se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície (Figura 1.41(b));*

*c) uma **hipérbole**, se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície (Figura 1.41(c)). A hipérbole deve ser vista como uma curva só, constituída de dois ramos, um em cada folha da superfície.*

*d) uma **circunferência**, se π for perpendicular ao eixo vertical (Figura 1.41(d))*

Observação *Observamos acima, que seccionando uma cônica através de um plano obtemos diversas curvas padrões. A seguir, obteremos essas curvas e/ou reta através da única equação dada por*

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0\,, \tag{9}$$

onde a, b, c, d e f *são constantes reais. A seguir analisamos a equação dada acima, considerando diversas possibilidades das constantes* a e b.

(i) Quando $a = b = 0$ *em (9) obtemos* $cx + dy + f = 0$, *a qual é uma* ***equação da reta*** *dependendo dos coeficientes* c, d *e* f.

(ii) Quando $a = 0, b \neq 0$ *ou* $a \neq 0, b = 0$ *em (9) obtemos* $by^2 + cx + dy + f = 0$ *ou* $ax^2 + cx + dy + f = 0$, *que é uma* ***equação geral da parábola***.

(iii) Quando $a = b \neq 0$ *em (9) temos* $ax^2 + ay^2 + cx + dx + f = 0$, *a qual é uma equação* ***geral da circunferência***.

(iv) Quando $a \neq b \neq 0$ *e* a *e* b *tem omesmo sinal, ou seja, as duas constantes são positivas ou são negativas, ou seja,* $ab > 0$, *então a equação (9) representa uma* ***equação geral da elipse***.

(v) Quando $a \neq b \neq 0$ *e* a *e* b *tem sinais diferentes, ou seja,* $ab < 0$, *então a equação (9) representa uma* ***equação geral da hipérbole***.

Saiba Mais...

Para aprofundar mais os temas estudados neste capítulo consulte:

- STEINBRUCH, A.; P. WINTERLE. **Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books,1987.

RESUMO

Nesta Unidade você acaba de estudar os conjuntos numéricos e as operações no conjunto dos Números Reais. Foram citadas as propriedades das desigualdades e as propriedades do módulo, ou valor absoluto, de um número real e intervalos. Você estudou a noção de sistema de coordenadas cartesianas, aprendeu em detalhes as principais curvas: a reta, a circunferência, parábola, elipse, hipérbole e viu também as equações de cada uma dessas curvas.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) $x \le -3$ ou $x \ge 3$.

b) $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{15}$.

c) ϕ (conjunto vazio).

d) $x \le -4$ ou $x \ge 10$.

2) $S = \left\{-3, \frac{9}{2}\right\}$

- **Exercícios propostos – 2**

1) a) $y = -2x + 5$. b) $y = 3x - 11$.

c) $y = 7x - 17$. d) $y = \frac{2}{3}x + 5$

2) a) $\frac{8}{\sqrt{17}}$. b) $\frac{15}{\sqrt{5}}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

3) a) $m = -2$. b) $m = \frac{4}{3}$.

4) a) $m = \frac{1}{13}$. b) $m = 3$.

5) a) $(-2,-1)$. b) $\left(-4, -\frac{15}{2}\right)$.

- **Exercícios propostos – 3**

1) a) Foco: $F(0,1)$, diretriz: $y = -1$.

b) Foco: $F(0,2)$, diretriz: $y = -2$.

c) Foco: $F(-2,0)$, diretriz: $x = 2$.

d) Foco: $F\left(\frac{1}{4},0\right)$, diretriz: $x = -\frac{1}{4}$.

2) a) $x^2 = 4y$.

b) $y^2 - 6y - 4x + 1 = 0$.

c) $y^2 - 6y + 10x + 54 = 0$.

d) $x^2 - 6x + 4y + 9 = 0$.

3) a) Vértice: $V(-2,-1)$, Foco: $F(-2,-2)$, diretriz: $x = 0$

b) Vértice: $V\left(\frac{5}{2},8\right)$, Foco: $F\left(\frac{1}{2},8\right)$, diretriz: $y = \frac{9}{2}$.

c) Vértice: $V\left(0,\frac{5}{3}\right)$, Foco: $F\left(0,\frac{14}{3}\right)$, diretriz: $y = -\frac{4}{3}$.

d) Vértice: $V(1,0)$, Foco: $F\left(1,\frac{1}{8}\right)$, diretriz: $y = -\frac{1}{8}$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

2) a) $P_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) $P_1\left(2\sqrt{-2+\sqrt{13}},-2+\sqrt{13}\right)$, $P_1\left(-2\sqrt{-2+\sqrt{13}},-2+\sqrt{13}\right)$.

3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

4) $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$

5) a) Vértices: $A(\pm 4,0)$, Focos: $F\left(\pm\sqrt{7},0\right)$.

b) Vértices: $A(0,\pm 3)$, Focos: $F\left(0,\pm\sqrt{5}\right)$.

c) Vértices: $A(\pm 2,0)$, Focos: $F\left(\pm\sqrt{3},0\right)$.

6) a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. b) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

c) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ d) $\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

7) a) Centro: $(3,-2)$, Vértices: $A_1(3,-5)$, $A_2(3,1)$,

Focos: $F\left(3,-2\pm\sqrt{5}\right)$.

b) Centro: $(-2,2)$, Vértices: $A_1(-2,-2)$, $A_2(-2,6)$,

Focos: $F\left(-2,2\pm\sqrt{15}\right)$.

c) Centro: $(1,2)$, Vértices: $A_1(-2,2)$, $A_2(4,2)$,

Focos: $F\left(1\pm\sqrt{5},2\right)$.

- **Exercícios propostos – 5**

1) a) Focos: $\left(\pm\sqrt{34},0\right)$, vértices $(5,0)$ e $(-5,0)$.

b) Focos: $\left(0,\pm\sqrt{34}\right)$, vértices $(3,0)$ e $(-3,0)$.

c) Focos: $\left(0,\pm\sqrt{13}\right)$, vértices $(0,2)$ e $(0,-2)$.

d) Focos: $\left(\pm\sqrt{2},0\right)$, vértices $(1,0)$ e $(-1,0)$.

2) a) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

b) $3x^2-y^2-4y=7$.

3) a) $C(-2,3)$, $A_1(-5,3)$, $A_2(1,3)$, $F_1(-6,3)$, $F_2(2,3)$.
b) $C(-3,3)$, $A_1(-5,3)$, $A_2(-1,3)$, $F\left(-3\pm\sqrt{5},3\right)$.
c) $C(2,-1)$, $A_1(2,-5)$, $A_2(2,3)$, $F_1(2,-6)$, $F_2(2,4)$.

UNIDADE

2

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Objetivo

Nesta unidade você vai, identificar os diferentes tipos e operações de matrizes; e empregar os diferentes tipos de matrizes na resolução de sistemas de equações lineares.

Matrizes e Sistema de Equações Lineares

Noção de matriz

A partir de agora faremos uma viagem através de matrizes e sistemas de equações lineares que lhe ajudarão, no futuro, a compreender melhor osmodelos econômicos.

Uma matriz A, $m \times n$ (m por n) é um quadro de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Usamos a notação $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m$.

Por exemplo,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ é a matriz 2×3 e

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ é a matriz 3×3.

Tipos das matrizes

Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m$ uma matriz dada. A seguir apresentaremos alguns tipos especiais de matrizes.

- **Matriz linha**

É uma matriz que possui uma linha só. A i – ésima linha da matriz A, é:

GLOSSÁRIO

Álgebra linear é um ramo da Matemática que estuda vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes. Não obstante o fato de a Álgebra Linear ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática.

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}_{i \times n}, i = 1,2,\dots,m.$$

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$.

- **Matriz coluna**

É uma matriz que possui uma coluna só. A *j*-ésima coluna de *A* é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{m \times j},$$

para $j = 1,2,\dots,n$, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}_{5 \times 1}.$$

- **Matriz nula**

É uma matriz na qual todos os elementos são iguais a zero. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2},$$

é uma matriz nula.

- **Matriz quadrada**

Se $m = n$ na matriz A, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n. Ou seja, uma matriz quadrada tem o número de linhas e colunas iguais. Dizemos também que os elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} formam a diagonal principal. Por exemplo,

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$$, A é matriz quadrada de ordem 2;

$$(b)\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$$, B é uma matriz quadrada de ordem 3.

A matriz quadrada tem algumas caraterísticas particulares, dadas a seguir:

- **Triangular superior:** É o triângulo da matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- **Triangular inferior:** É o triângulo da matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz diagonal:** É a matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz identidade:** É a matriz quadrada, onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$, ou seja

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Por exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz transposta**

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ obtida trocando-se as linhas pelas colunas, ou seja, $b_{ji} = a_{ij}$, $i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$.

Escrevemos a matriz transposta como:

$$B = A^t,$$

Isto é, A^t é obtida transformando-se ordenadamente cada linha de A em colunas.

Por exemplo,

(a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, então sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz simétrica**

Uma matriz A é simétrica quando $A^t = A$, ou seja, a matriz e sua transposta são iguais. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix},$$

então,

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix},$$

isto é, $A = A^t \Rightarrow$ A matriz A é simétrica.

- **Matriz anti-simétrica**

Uma matriz A é anti-simétrica, quando $A^t = -A$. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

então,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $A^t = -A \Rightarrow$ A matriz A é anti-simétrica.

- **Matrizes em blocos**

Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m$, uma matriz dada. Eliminando algumas linhas ou colunas, obtemos uma outra matriz B da menor ordem. B é chamada **submatriz** de A. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

então $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ pode ser uma das suass **submatrizes**, onde eliminamos a terceira linha e a terceira coluna.

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

pode ser particionada como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde A_{11}, A_{12}, A_{21} *e* A_{22}, *são submatrizes de A, conforme separadores indicados na matriz A. Também podemos particionar a matriz A,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & a_{21} & \vdots & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

o que nos dá uma outra subdivisão de A. Matrizes subdivididas são chamadas de ***matrizes em blocos****.*

- **Matriz aumentada**

Sejam A e B duas matrizes com mesmo número de linhas, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}_{m \times k}.$$

A matriz aumentada é a matriz $\left[A : B\right]$ obtida colocando lado a lado, as matrizes *A* e *B*, de modo a se constituírem numa matriz de ordem $m \times (n+k)$. Então

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}_{m\times(n+k)}.$$

A matriz aumentada, geralmente, é utilizada no cálculo da inversa de uma matriz, na resolução de sistema de equações lineares, etc.

Determinante de uma matriz

Determinante de uma matriz é um valor numérico, e é obtido somente quando a matriz é quadrada. Seu cálculo segue no exemplo a seguir:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 2(-2 - 0) - 2(5 - 6) + 1(0 + 4) = 2.$

- **Propriedades do determinante**

Seja A uma matriz quadrada. O determinante da matriz quadrada A, $\det(A) = |A|$ satisfaz algumas propriedades. Veja a seguir:

(i) O determinante de A e de sua transposta A^t são iguais, ou seja, $|A| = |A^t|$;

(ii) Se uma matriz B é obtida de uma matriz A trocando-se duas linhas (ou colunas) de A, então $\det(B) = -\det(A)$;

(iii) Se uma matriz B é obtida de A multiplicando-se uma linha (ou coluna) de A por um número real c, então $\det(B) = c\ \det(A)$;

(iv) Se $B = [b_{ij}]$ é obtida de $A = [a_{ij}]$ somando-se a cada elemento da r–ésima linha (respectivamente, coluna) de A uma constante c, vezes o elemento correspondente a s–ésima linha (respectivamente, coluna) de A, $r \neq s$, então $\det(B) = \det(A)$;

(v) Se uma matriz $A = [a_{ij}]$ é uma matriz triangular superior (ou inferior), então $\det(A)$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, ou seja, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;

(vi) O determinante de um produto de matrizes é igual ao produto de seus determinantes, isto é, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Nesse caso é necessário que as matrizes sejam quadradas;

(vii) Se A tem uma linha (ou coluna) de zeros, então $|A| = 0$;

(viii) Se A tem duas linhas (ou colunas) idênticas, então $|A| = 0$;

(ix) Se A é triangular, isto é, A tem zeros acima ou abaixo da diagonal principal, então, o valor do determinante de A é o produto dos elementos diagonais. Assim, em particular $|I| = 1$, onde I é a matriz identidade.

Operações matriciais

Apresentaremos a seguir três tipos de operações em matrizes. **Adição de matrizes**, **multiplicação de uma matriz por escalar** e **multiplicação de duas matrizes**.

Adição de matrizes

A soma ou adição de duas matrizes do mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$. Escrevemos

$$C = A + B.$$

Por exemplo,

(a) Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-3 & 4-2 \\ 3+4 & 5+1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

(b) Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2},$$

então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+5 & 2+7 \\ 5+9 & 4+3 \\ 9+2 & 3-1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 14 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

- **Propriedades da operação de adição**

Sejam A, B, C e D matrizes da ordem da mesma ordem, $m \times n$. Então valem as seguintes propriedades:

(i) **Comutativa:** $A + B = B + A$;

(ii) **Associativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(iii) **Existência do elemento neutro:** Existe uma única matriz $m \times n$ O tal que $A + O = A$, para todas as matrizes $A, m \times n$. A matriz O é chamada de **matriz nula** ou **elemento neutro** para a soma de matrizes de ordem $m \times n$;

(iv) **Existência do inverso aditivo:** Para cada matriz A existe uma única matriz da mesma ordem D, tal que: $A + D = O$. Denotamos D por $-A$, então podemos escrever $A + (-A) = O$. A matriz $-A$ é chamada de matriz **inversa aditiva** ou **negativa** de A.

Multiplicação de uma matriz por escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um escalar α é definida pela matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, obtida multiplicando-se cada elemento da matriz pelo escalar α, ou seja, $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$, $i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$. Então, escrevemos $B = \alpha A$.

Por exemplo, o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ pelo escalar –2 é dada por

$$(-2)A = (-2)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -6 & -14 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

- **Propriedades da multiplicação de uma matriz por escalar**

Sejam A e B duas matrizes da mesma ordem. Se r e s são números reais, então valem as seguintes propriedades:

(ii) $r(sA) = (rs)A$;

(ii) $(r+s)A = rA + sA$;

(iii) $r(A+B) = rA + rB$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ e $r = -2$, então temos

$$-2(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 12 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -2A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 12 & 8 \end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedade (iii).

Produto de duas matrizes

O produto de duas matrizes só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda. Ou seja, o produto de $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{jk})_{n\times p}$ *é definido pela matriz* $C = (c_{ik})_{i\times p}$ *e é obtido da seguinte forma:*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

para todo $i = 1,2,\ldots,m;\ k = 1,2,\ldots.,p$. *Então, escrevemos* $C = AB$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, então o produto de duas matrizes A e B é dado por

$$AB = \begin{bmatrix} 1.3 + 2.4 + 3(-1) & 1.2 + 2.5 + 3.2 & 1.0 + 2(-3) + 3(-2) \\ 5.3 + (-3)4 + 0(-1) & 5.2 + (-3)5 + 0.2 & 5.0 + (-3)(-3) + 0(-2) \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 18 & -12 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Observe que neste caso o produto BA não está definido. Entretanto, mesmo quando está definido, BA não será necessariamente igual a AB.

- **Propriedades da operação da multiplicação**

A seguir, apresentaremos algumas propriedades da multiplicação entre matrizes.

(i) Sejam A, B e C três matrizes da ordem $m \times n$, $n \times k$ e $k \times p$ respectivamente, então

$$A(BC) = (AB)C\,.$$

(ii) Sejam A, B e C três matrizes da ordem $m \times n$, $n \times k$ e $n \times k$ respectivamente, então

$$A(B + C) = AB + AC\,.$$

(iii) Sejam A, B e C três matrizes da ordem $m \times n$, $m \times n$ e $n \times k$ respectivamente, então

$$(A + B)C = AC + BC\,.$$

(iv) Sejam A e B duas matrizes da ordem $m \times n$ e $n \times k$ respectivamente. Seja r um número real, então

$$A(rB) = r(AB) = (rA)B\,.$$

Observação

*(i) A propriedade (a) é conhecida como **associativa**, propriedades (b) e (c) são conhecidas como **distributivas**. A propriedade (d) é para multiplicação por escalar.*

(ii) Nas propriedades acima, as ordens das matrizes são escolhidas de maneira que seja possível a operação de multiplicação e/ou adição.

(iii) No caso de adição de matrizes, sabemos que a operação é comutativa para matrizes da mesma ordem. Mas isso não acontece com a operação de multiplicação, ou seja, nem sempre AB é igual BA, mesmo se os produtos existem.

Veja a seguir um exemplo para observação(iii):

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 2+6 & -5+2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 10 \end{bmatrix},$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 2+10 & 4 \\ 3-2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$AB \neq BA$$

Exemplo 2.1 *(a) Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

três matrizes. Então,

$$A(BC) = \begin{bmatrix} -4 & 108 & -76 \\ 35 & -76 & 137 \end{bmatrix} e\,(AB)C = \begin{bmatrix} -4 & 108 & -76 \\ 35 & -76 & 137 \end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedades (i).

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

três matrizes. Então,

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -10 & -3 \end{bmatrix} e\ AC + BC = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -10 & -3 \end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedade (ii).

(c) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

duas matrizes. Seja $r = -3$, *então*

$$A(-3B) = \begin{bmatrix} -9 & 33 \\ -15 & 39 \end{bmatrix} \; e \; (-3)(AB) = \begin{bmatrix} -9 & 33 \\ -15 & 39 \end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedade (iv).

Propriedades da transposta da matriz

Vimos a definição da matriz transposta. A partir de agora, apresentaremos algumas propriedades da matriz transposta. Fique atento e certifique-se que entendeu antes de prosseguir.

Sejam A e B duas matrizes e seja r um número real, então a transposta de uma matriz, (definida acima), satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(A^t)^t = A$;

(ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$, onde A e B são matrizes da mesma ordem;

(iii) $(AB)^t = B^t A^t$, onde A e B são matrizes da ordem $m \times n$ e $n \times k$ respectivamente;

(iv) $(rA)^t = rA^t$.

Exemplo 2.2

(a) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, *então*

$$(A+B)^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \; e \; A^t + B^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

(b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ *são matrizes, então*

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} e\, B^t A^t = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Exercícios propostos – 1

1) Considerar as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Se possível, calcular

a) $AB - BA$; b) $DE - ED$; c) $C - D$;

d) $B^2 - A$; e) $D^2 - E$.

2) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \text{e}\, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix},$$

se possível, determinar:

a) a segunda linha da matriz CA;

b) a primeira linha da matriz AB;

c) a terceira linha da matriz BC;

d) a quarta linha da matriz CB.

3) Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{e}\, F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível

a) AB; b) BA; c) $AC + A$;
d) $AB - F$; e) $BA + CE$; f) $A(BD)$;
g) $(AB)D$; h) $A(C + E)$; i) $AC + AE$;
j) $(F + D)A$.

4) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Encontre

a) $A^2 + 2A$; b) $A^2 + B^2 + 2AB$;
c) $(A + B)^2$; d) $AB + BA$;
e) $A^3 + 3A^2 + 3A + 2I_2$; f) $B^3 - 2B^2 - 3B + 4I_2$.

5) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcule, se possível:

a) $(3D - F)^t D$; b) $A^t(D + F)$;
c) $B^t A^t$; d) $(2C)A^t$; e) $(B^t + A)A^t$.

Operações elementares

A seguir, apresentaremos três tipos de operações elementares numa matriz A, onde L_i, L_j etc. representam as linhas da matriz.

1ª Operação: ***Permuta de linha****, ou seja, a troca de duas linhas uma pela outra na matriz, isto é, $L_i \leftrightarrow L_j$, onde L_i, L_j etc. representam as linhas da matriz.*

Por exemplo, se considerarmos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então, trocando a linha L_1 por L_2, ou vice-versa, obteremos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2ª Operação: ***Multiplicação*** *de uma linha por um escalar não nulo.*

Por exemplo, se considerarmos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

então, multiplicando a segunda linha por 2, isto é, $2L_2$, obteremos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 10 & 16 \\ 3 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

3ª Operação: *Substituição de uma linha pela soma com outra previamente multiplicada por um escalar não nulo, ou seja, substituição de linha L_i por $L_i + cL_j$, onde c é um escalar não nulo.*

Por exemplo, se considerarmos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, efetuando a operação $(-1)L_1 + L_3$, isto é, multiplicando a primeira linha por (–1) e somando na terceira, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As três operações dadas acima são fundamentais para definir a equivalência entre matrizes, dada a seguir.

Matrizes equivalentes

Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem, dizemos que ***B é equivalente a A****, se B é obtida de A através de um número finito de operações elementares entre as linhas. Denotamos por* $B \sim A$.

Observação

(i) As operações elementares definidas acima em relação às linhas, também podem ser definidas em relação às colunas. Mas por uma questão prática, por exemplo, em cálculo de inversa e resolução de sistema de equações sempre formamos a matriz aumentada em relação às linhas, por isso sempre utilizamos as operações elementares em relação às linhas.

(ii) Qualquer matriz quadrada A, de ordem n, não singular ($\det(A) \neq 0$ *), pode ser transformada na matriz equivalente* I_n*, de mesma ordem, por meio de uma sucessão finita de operações elementares, isto é,* $I_n \sim A$.

Veja alguns exemplos abaixo.

Exemplo 2.3 *Aplicando as operações lineares, transforme a matriz quadrada A em matriz identidade equivalente.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix},$$

Resolução: Inicialmente, devemos calcular o determinante da matriz, conforme observação acima. Neste caso,

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & 2 & -5\end{vmatrix}=-1\neq 0\,.$$

Logo, podemos efetuar as operações elementares, a fim de obter a matriz identidade. Aplicando as seguintes operações elementares sobre a matriz A:

$$L_1\to\frac{1}{3}L_1\ \ ;\ \ L_2\to L_2+(-2)L_1\ \ ;\ \ L_3\to L_3+(-4)L_1\ \ ;\ \ L_2\to 3L_2\ \ ;$$

$$L_3\to L_3+\left(-\frac{2}{3}\right)L_2;\ \ L_3\to(-1)L_3\ \ ;\ \ L_1\to L_1+\left(-\frac{1}{3}\right)L_2\ \ ;$$

$$L_2\to L_2+12L_3;\qquad L_1\to L_1+(-5)L_3,$$

respectivamente, obtemos a matriz identidade equivalente, I_3, dada por

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Observação *Mais detalhes sobre o procedimento de operações elementares, com alguns exemplos desenvolvidos, passo a passo, estão no material on-line do ambiente.*

Cálculo do determinante usando operações elementares

Podemos calcular o valor do determinante de uma matriz quadrada usando operações elementares, ou seja, transformando a matriz em triangular superior, conforme definido anteriormente. Esse processo é conhecido como triangularização. Dependendo de cada operação, o valor do determinante fica igual ou muda, conforme dado abaixo.

Seja B a matriz triangular obtida da matriz A. Aplicando as operações elementares, o valor do determinante A depende do valor do determinante B, nas seguintes situações:

a) Quando trocamos uma linha por outra, ou seja, troca de linhas entre si, então

$$\det(A) = -\det(B).$$

b) Quando multiplicamos uma linha por uma constante t não nula, então

$$\det(A) = \frac{1}{t}\det(B)$$

c) Quando multiplicamos uma linha por uma constante não nula e somamos à outra, então o valor do determinante continua sendo o mesmo, isto é,

$$\det(A) = \det(B).$$

Exemplo 2.4 *Encontre o determinante da matriz, pelo método da triangulação*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Fazendo as seguintes operações elementares

$$L_1 \to \frac{1}{3}L_1 ; L_2 \to L_2 + (-2)L_1 ; L_3 \to L_3 + 3L_1 ; L_3 \to L_3 + \frac{9}{13}L_2 ,$$

respectivamente, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{63}{13} \end{bmatrix}.$$

Pela propriedade de determinante (ix), podemos calcular o valor do determinante B, multiplicando apenas os elementos da coluna principal, pois a matriz B está em forma triangular, então temos

$$\det(B) = 1 \cdot \left(-\frac{13}{3}\right)\left(\frac{63}{13}\right) = -\frac{63}{3}.$$

Agora, pelas colocações a) e c) dadas acima, temos o valor do determinante A dado por

$$\det(A) = 3\det(B) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63,$$

pois nesse caso, a aplicação da propriedade b), foi feita somente uma vez e todas as outras operações foram feitas aplicando a propriedade c).

Para ser mais simples temos a seguinte observação:

Observação *O cálculo do determinante acima é feito usando as propriedades b) e c). Mas, sempre podemos escrever a matriz dada, numa forma triangular, somente utilizando a terceira operação elementar, ou seja, aplicando a propriedade c). Veja os cálculos abaixo:*

Fazendo as seguintes operações elementares

$$L_2 \to L_2 + (-\frac{2}{3})L_1 ; L_3 \to L_3 + 3L_1 ; L_3 \to L_3 + \frac{9}{13}L_2 ,$$

respectivamente, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{63}{13} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\det(A) = 3\det(B) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63,$$

pois nesse caso para chegar até a matriz triangular somente as operações elementares serão utilizandos (c).

Matriz inversa

Nesta seção, apresentaremos a matriz inversa e seus cálculos, usando o processo de operações elementares e a matriz aumentada.

Dada uma matriz A quadrada de ordem n. Chamamos inversa de A, a matriz B, tal que

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n *é a matriz identidade de ordem n. Neste caso, dizemos que A é uma matriz inversível (ou não singular). Denotamos por* $B = A^{-1}$.

Observe que nem toda matriz quadrada sempre é inversível. A seguir apresentaremos um resultado que garante a existência da inversa da uma matriz.

GLOSSÁRIO

Teorema*: Algo que se afirma, mas que necessita de demonstração.

Teorema* 2.1 *Uma matriz A quadrada é inversível se, e somente se, A é não singular (ou* $\det(A) = |A| \neq 0$*).*

Teorema 2.2 *Se a matriz A admite inversa então esta inversa é única.*

Teorema 2.3 *Uma matriz quadrada* $n \times n$ *é inversível se e somente se é equivalente por linhas a* I_n.

Propriedades da matriz inversa

A seguir apresentaremos algumas propriedades da matriz inversa.

(i) Se A e B são inversíveis, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) Se A é inversível, então

$$(A^{-1})^{-1} = A\,.$$

(iii) Se A não é singular, então A^{-1} também é não singular.

(iv) Se A é inversível, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Exemplo 2.5 *Calcular a inversa da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Temos

$$\det(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{existe a inversa de } A.$$

Sabemos que

$$AA^{-1} = I\,.$$

Seja

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou,

$$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ 3a + 2c = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2, b = -1, c = -3 \quad \text{e} \quad d = 2$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de matriz inversa usando operações elementares – Método de Jordan

O método para calcular a inversa da matriz A, usando as operações elementares é o seguinte:

1º Passo: *Calcular* $\det(A)$. *Se* $\det(A) \neq 0$, *então existe a inversa da matriz, se* $\det(A) = 0$, *então não existe a inversa. Caso exista a inversa, seguir o próximo passo.*

2º Passo: *Escrever a matriz aumentada* $n \times 2n$ *na forma* $[A \vdots I_n]$, *onde A é a matriz de ordem n e* I_n *é a matriz identidade de ordem n, ou seja, colocar lado a lado a matriz A e* I_n *formando uma matriz aumentada.*

3º Passo: *Transformar a matriz A, escrita no segundo passo, em matriz identidade, usando as operações elementares nas linhas, e aplicando as mesmas operações em* I_n, *dadas no segundo passo, nas linhas correspondentes. Assim obtemos* $[I_n \vdots A^{-1}]$.

Observação *A mesma seqüência de operações que leva a matriz A à sua identidade faz com que a identidade chegue à inversa, ou seja, formando a matriz aumentada* $[A \vdots I_n]$, *e aplicando as operações elementares chegamos a* $[I_n \vdots A^{-1}]$, *isto é,*

$$[A \vdots I_n] \sim \sim \sim \ldots \sim [I_n \vdots A^{-1}].$$

Exemplo 2.6 Encontrar a inversa da matriz, usando as operações elementares

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resolução: $\det(A) = -1 \neq 0$. Logo, existe a inversa da matriz A.

Vamos escrever a matriz A e a matriz identidade lado a lado na forma de matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

O objetivo agora é aplicar as operações elementares nas linhas de A e as mesmas operações na matriz I_3. Queremos chegar à matriz A como I_3, e a matriz I_3 transformada passa a ser inversa de A. Veja os passos a seguir.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to (-1)L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + (-2)L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_2 + L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 + (-3)L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + (-5)L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18 & -11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & -11 & -5 \\ 11 & -7 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.7 *Determinar a inversa da matriz, usando o método de Jordan.*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resolução: $\det(A) = -63 \neq 0$. Logo, existe a inversa da matriz *A*.

Vamos escrever a matriz *A* na forma aumentada com a matriz I_3.

$$\left[A \vdots I_3\right] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo as seguintes operações elementares, na matriz acima,

$$L_1 \to (-\frac{1}{3})L_1; L_3 \to L_3 + (-3)L_1; L_2 \to L_2 + (-2)L_1; L_2 \to 3L_2$$
$$; L_3 \to L_3 + (-3)L_2; \quad L_3 \to (-\frac{1}{63})L_3; \; L_1 \to L_1 + (-\frac{4}{3})L_2;$$
$$L_2 \to L_2 + 19L_3; \quad L_1 \to L_1 + (-25)L_3,$$

respectivamente, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{64}{63} & -\frac{3}{7} & -\frac{25}{63} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{31}{63} & \frac{2}{7} & \frac{19}{63} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{5}{63} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{64}{63} & -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{25}{63} \\ \dfrac{31}{63} & \dfrac{2}{7} & \dfrac{19}{63} \\ -\dfrac{5}{63} & -\dfrac{1}{7} & \dfrac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Matriz escalonada

Nesta seção apresentaremos a noção de matriz escalonada. Também apresentaremos a matriz canônica, que é caso mais específico da matriz escalonada. Leia com atenção, resolva os exercícios propostos, anote suas dúvidas e busque esclarece-las junto ao Sistema de Acompanhamento.

Dizemos que uma matriz é ***escalonada*** *se, e somente se, o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo em cada linha, geralmente conhecido como* ***elemento notável****, aumenta de linha em linha, até que restem apenas linhas com elementos nulos. Podemos dizer que uma matriz A é escalonada ou está em forma escalonada, se valem as seguintes condições:*

(i) todas as linha nulas, se houver, estão no final (ou na base) da matriz;
(ii) cada elemento notável não nulo está à direita do elemento notável da linha precedente.

Veja alguns exemplos a seguir.

(i) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é escalonada;

(ii)A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é escalonada;

(iii) A matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é escalonada;

(iv) A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é escalonada.

Matriz canônica ou reduzida

Dizemos que uma matriz é ***canônica*** *ou* ***reduzida,*** *quando os* ***elementos notáveis*** *forem todos iguais a um e forem os únicos não nulos nas suas respectivas colunas. Mais precisamente, podemos dizer que uma matriz A é* ***canônica*** *ou* ***reduzida*** *por linhas, quando*

(i) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de A é igual a 1;

(ii) cada coluna de A, que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha de A, tem todos os outros elementos iguais a zero.

Veja alguns exemplos a seguir:

(i) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é canônica;

(ii) A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é canônica;

(iii) A matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é canônica;

(iv) A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é canônica.

Observação

(i) Qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz canônica ou reduzida por linhas.

(ii) Matriz identidade sempre é matriz canônica.

(iii) Matriz quadrada é equivalente a matriz identidade da mesma ordem, quando $\det(A) \neq 0$, *ou seja, quando existe a sua inversa.*

Exemplo 2.8 *Aplicando as operações elementares, transforme a matriz dada em matriz canônica.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Aplicando as seguintes operações

$$L_1 \to \frac{1}{2}L_1; L_2 \to L_2 + 3L_1; L_3 \to L_3 + (-4)L_1; L_2 \to \frac{2}{3}L_2;$$

$$L_3 \to L_3 + L_2;\ L_1 \to L_1 + (-\frac{1}{2})L_2; L_3 \to (-\frac{3}{2})L_3; L_2 \to L_2 + (-\frac{22}{3})L_3$$

$$; L_1 \to L_1 + \frac{5}{3}L_3.$$

respectivamente, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 59 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz

Seja A uma matriz e seja B a sua forma escalonada. Define-se como posto da matriz A, $p(A)$, como sendo o número de linhas não nulas da matriz B.

Por exemplo, no caso dos exemplos dados na seção 2.6.1 temos: $p(A) = 3$, pois a matriz não é canônica, mas é escalonada, $p(B) = 3$, $p(C) = 1$ e $p(D) = 3$.

Observação *Através do posto da matriz podemos identificar se uma matriz quadrada é singular ou não singular, isto é, se A é uma matriz quadrada de ordem n, então*

(i) *A é singular, se e somente se,* $p(A) < n$;

(ii) *A é não singular, se e somente se,* $p(A) = n$.

Exercícios propostos – 2

1) Aplicando o método de triangulação, calcular o valor do determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 13 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Por meio de operações elementares, transformar as seguintes matrizes quadradas em matrizes identidades equivalentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Se possível, encontrar as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix};;$$

4) Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontrar A, B, $(AB)^{-1}$ e $(BA)^{-1}$.

5) Encontre o valor de x nas seguintes equações:

a) $$\begin{vmatrix} x & -2 & 2x \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1;$$

b) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & -x & 4 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = -2 .$$

6) Quais das seguintes matrizes estão na forma canônica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7) Transformar as seguintes matrizes em forma canônica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sistema de equações lineares

Considere o sistema linear de m equações e n incógnitas

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

O sistema S pode ser representado pela equação matricial $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

sendo A, a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B, a matriz dos termos independentes.

Tipos de sistemas

Há dois tipos de sistema de equações lineares, sendo que um deles é conhecido como consistente e o outro, como inconsistente. O sistema inconsistente é aquele que não admite soluções. O sistema consistente é aquele que admite soluções. Há dois tipos de sistemas consistentes, um deles é determinado e o outro é indeterminado. O sistema determinado é aquele que tem uma única solução e o indeterminado é aquele que tem múltiplas ou infinitas soluções. Veja a figura abaixo:

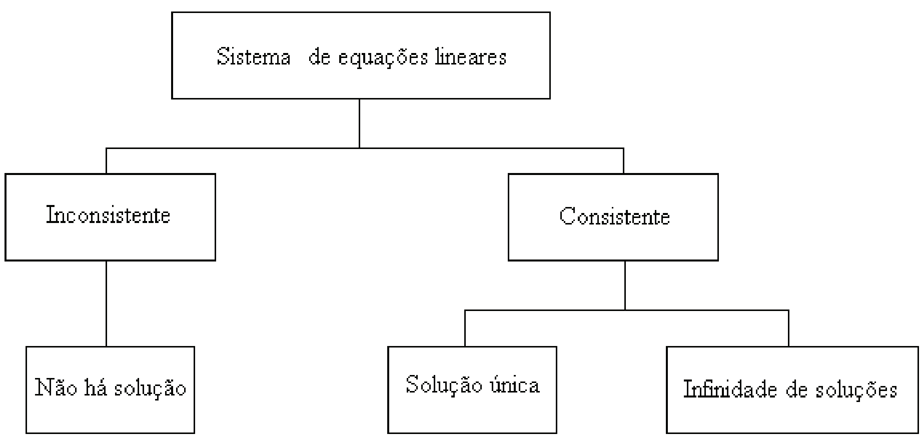


Figura: Tipo de Sistemas. **Fonte:** Elaborado pelos autores

Existência da solução

Um sistema linear $AX = B$ de m equações em n incógnitas é consistente, se e somente se $p(A) = p\left(\left[A \vdots B\right]\right)$. Neste caso, se consideramos r o número de equações do sistema na forma escalonada, $p(A) = p\left(\left[A \vdots B\right]\right) = r$. Agora temos dois casos a analisar

(i) quando $r = n$, ou seja, o número de equações dadas é igual ao número de equações na forma escalonada, nesse caso, o sistema é determinado, isto é, existe uma única solução;

(ii) quando $r < n$, ou seja, o número de equações dadas é menor que o número de equações na forma escalonada, nesse caso, o sistema é indeterminado, isto é, existem infinitas soluções;

Se $p(A) < p\left(\left[A \vdots B\right]\right)$, ou seja, o posto da matriz A é menor que o posto da matriz aumentada, nesse caso, o sistema é inconsistente, isto é, não existe a solução do sistema.

Resolução de sistema de equações lineares

A seguir, apresentaremos duas formas diferentes de resolver um sistema de equações lineares. Uma se dá com a utilização de matriz escalonada, que é conhecido como processo de eliminação de Gauss-Jordan, e a segunda forma se dá com o uso de matriz inversa.

- **Processo de Eliminação de Gauss-Jordan**

Podemos resolver um sistema de equações lineares aplicando as operações elementares dadas na seção 2.5, pois sabemos que aplicando operações elementares sobre uma matriz obtemos sempre uma matriz equivalente. Nesse caso, as operações elementares transformam o sistema original em um sistema equivalente. Esse processo é conhecido como processo de eliminação de Gauss-Jordan.

Seja $AX = B$ o sistema dado. Para resolver esse sistema devemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: *Formar a matriz aumentada* $[A \vdots B]$.

2º Passo: *Levar a matriz aumentada* $[A \vdots B]$ *à forma escalonada, usando operações elementares sobre as linhas.*

Para ver a solução do sistema, siga as seguintes observações:

Observação

(i) O sistema que corresponde à matriz na forma escalonada obtida acima, tem exatamente as mesmas soluções que o sistema linear dado.

(ii) Para cada linha não nula da matriz na forma escalonada resolvemos a equação correspondente.

(iii) As linhas formadas totalmente por zeros, podem ser desprezadas, pois as equações correspondentes serão satisfeitas para quaisquer valores das incógnitas.

(iv) É conveniente, sempre transformar a matriz aumentada na matriz canônica, pois nesse caso a solução do sistema é imediata.

Veja a seguir alguns exemplos de resolução de sistemas lineares.

Exemplo 2.9 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x - 2y - 2z & = 3 \\ -2x + 3y + z & = -4 \\ 3x + 2y - z & = 2 \end{cases}$$

Resolução: Podemos escrever o sistema de equações em forma matricial $AX = B$, isto é,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Matriz} \\ \text{dos} \\ \text{coeficientes}}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Matriz} \\ \text{das} \\ \text{incógnitas}}} = \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Matriz dos} \\ \text{termos} \\ \text{independentes}}}$$

Podemos resolver o sistema utilizando a matriz aumentada $[A \vdots B]$ e aplicando as operações elementares. Veja a seguir:

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 3 \\ -2 & 3 & 1 & \vdots & -4 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações elementares,

$$L_2 \to L_2 + 2\,L_1 ; L_3 \to L_3 + (-3)L_1 ; L_2 \to (-1)L_2 ; L_3 \to (-\frac{1}{19})L_3 ;$$

$$L_1 \to L_1 + 2\,L_2 ;\ L_2 \to L_2 + (-3)\ L_3 ; L_1 \to L_1 + (-4)\ L_3 ,$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{17}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{11}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{9}{19} \end{bmatrix}.$$

Isto implica que

$$p(A) = p\left([A \vdots B]\right) = 3 .$$

Logo, o sistema é consistente e determinado.

Portanto,

$$x = \frac{17}{19},\ y = -\frac{11}{19} \text{ e } z = -\frac{9}{19}$$

é a solução do sistema.

Exemplo 2.10 *Resolver o sistema:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 5 \\ x - 2y + 2z & = 4 . \\ -2x \quad - z & = 3 \end{cases}$$

Resolução: Podemos escrever o sistema de equações na forma matricial $AX = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos resolver o sistema, utilizando a matriz aumentada $[A \vdots B]$ e aplicando as operações elementares. Veja a seguir

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 4 & -2 & 2 & \vdots & 4 \\ -2 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações elementares,

$$L_2 \to L_2 + (-1)\ L_1 ; L_3 \to L_3 + 2\ L_1 ; L_3 \to L_3 + \ L_2 ; L_2 \to (-\frac{1}{4})L_2 ;$$
$$L_3 \to (\frac{1}{4})L_3 ; L_1 \to L_1 + (-2)\ L_2 ; L_2 \to L_2 + (-\frac{1}{4})L_3 ;$$
$$L_1 \to L_1 + (-\frac{5}{2})L_3 ,$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

Isto implica que

$$p(A) = p\left([A \vdots B]\right) = 3 .$$

Logo, o sistema é consistente e determinado.

Portanto,

$$x = -3 ,\ y = -\frac{1}{2} ,\ z = 3 ,$$

é a solução do sistema.

Exemplo 2.11 *Resolver o sistema linear de três equações em duas variáveis*

$$\begin{cases} x + 2y & = 8 \\ 3x + 2y & = -4 \\ 5x - 2y & = 4 \end{cases}$$

Resolução: Escrevendo o sistema de equações na forma matricial $AX = B$, temos a seguir a matriz aumentada

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 8 \\ 3 & 2 & \vdots & -4 \\ 5 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}.$$

Fazendo as seguintes operações elementares,

$L_2 \to L_2 + (-3)\ L_1$; $L_3 \to L_3 + (-5)\ L_1$; $L_2 \to (-\frac{1}{4})\ L_2$;

$L_3 \to L_3 + (-2)\ L_2$;

$L_1 \to L_1 + (-2)\ L_2$,

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & \vdots & 48 \end{bmatrix}.$$

Observe que nesse caso, $p(A) = 2$ e $p\left([A \vdots B]\right) = 3$ e 2 < 3, portanto o sistema é inconsistente. Logo, não existe solução para o sistema.

- **Resolução de sistema de equações usando a matriz inversa**

Podemos escrever o sistema de equações na forma matricial como $AX = B$. Se a matriz A é quadrada e se existe a inversa A^{-1} de A, então $X = A^{-1}\ B$.

Exemplo 2.12 *Resolver o sistema de equações utilizando a inversa*

$$\begin{cases} x + 2y + 2z & = 12 \\ 2x + 3y - 2z & = -1 \\ -5x + 2y - z & = -3 \end{cases}$$

Resolução: Resolvemos este exemplo, utilizando A^{-1}. Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos a inversa da matriz A, aplicando as operações elementares:

$$L_2 \to L_2 + (-2)\,L_1\,; L_3 \to L_3 + 5\,L_1\,; L_2 \to (-1)L_2\,;$$

$$L_3 \to L_3 + (-12)\,L_2\,;\; L_1 \to L_1 + (-2)\,L_2\,; L_3 \to -\frac{1}{63}L_3\,;$$

$$L_2 \to L_2 + (-6)\,L_3\,; L_1 \to L_1 + 10\,L_3\,,$$

respectivamente, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{63} & \frac{2}{21} & -\frac{10}{63} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{63} & -\frac{4}{21} & -\frac{1}{63} \end{array}\right]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & \frac{2}{21} & -\frac{10}{63} \\ \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{19}{63} & -\frac{4}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Temos,

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & \frac{2}{21} & -\frac{10}{63} \\ \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{19}{63} & -\frac{4}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{13}{7} \\ \frac{27}{7} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7}\;,\; y = \frac{13}{7} \text{ e } z = \frac{27}{7}.$$

Exemplo 2.13 *Resolver o sistema de equações utilizando a inversa*

$$\begin{cases} -2x - y - 3z & = 2 \\ 3x + 2y + z & = 1 \\ 2x + y - z & = 5 \end{cases}$$

Resolução: Temos

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Calculamos a inversa da matriz *A*, aplicando as operações elementares,

$L_1 \to -\frac{1}{2}\,L_1$; $L_2 \to L_2 + (-3)\,L_1$; $L_3 \to L_3 + (-2)L_1$;
$L_1 \to L_1 + (-1)\,L_2$;
$L_2 \to 2\,L_2 ; L_3 \to -\frac{1}{4}L_3 ; L_2 \to L_2 + 7\,L_3 ; L_1 \to L_1 + (-5)L_3$,

respectivamente, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ -\frac{17}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{4},\ y = -\frac{17}{4} \text{ e } z = -\frac{7}{4}.$$

Sistema de equações lineares homogêneas

Um sistema linear de forma $AX = 0$, ou seja,

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases},$$

é chamado de sistema homogêneo.

A solução $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ é chamada de solução trivial.

Uma solução $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de um sistema homogêneo em que nem todos os x_i são nulos, é chamado de não trivial.

Observação

(i) Um sistema linear homogêneo sempre é consistente pois sempre tem a solução trivial, mas quando o número de incógnitas (variáveis) é maior do que o número de equações, existe solução não trivial, ou seja, um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas sempre tem uma solução não trivial, quando $m < n$.

(ii) Quando uma matriz quadrada é singular (ou seja, $\det(A) = 0$*), então o sistema homogêneo* $AX = 0$ *tem uma solução não trivial.*

O método para encontrar as soluções, se existir, de um sistema linear homogêneo, é o mesmo método utilizado para resolver um sistema de m equações lineares em n variáveis.

Exemplo 2.14 *Resolver o sistema homogêneo de 3 equações com 2 variáveis*

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 8y = 0 \\ 5x + 10y = 0 \end{cases}$$

Resolução: A solução trivial é $x = y = 0$. Vamos encontrar a solução não trivial, formando a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & \vdots & 0 \\ 1 & -8 & \vdots & 0 \\ 5 & 10 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando as operações elementares:

$$L_2 \to \frac{1}{2}L_2\,; L_2 \to L_2 + (-1)L_1\,;\ L_3 \to L_3 + (-5)L_1$$

respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = 0$ e $y = 0$ é a única solução do sistema.

Exemplo 2.15 *Resolver o sistema homogêneo de 2 equações com 3 variáveis.*

$$\begin{cases} x - 3y + 4z & = 0 \\ 2x - 6y + 8z & = 0 \end{cases}$$

Resolução: Solução trivial $x = y = z = 0$.

Para encontrar a solução não trivial ,vamos formar a matriz aumentada e aplicar as operações elementares sobre linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 0 \\ 2 & -6 & 8 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$x - 3y + 4z = 0 \text{ ou, } x = 3y - 4z\,.$$

Observando a equação acima, podemos dizer que o sistema tem uma infinidade de soluções, pois escolhendo y e z sempre tem-se o valor de x.

Exemplo 2.16 *Resolver o sistema homogêneo de 3 equações com 3 variáveis*

$$\begin{cases} x-3y+2z & =0 \\ 2x+y-z & =0 \\ 3x+2y-4z & =0 \end{cases}$$

Resolução: A solução trivial é $x = y = z = 0$. Vamos encontrar a solução não trivial, formando matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando as operações elementares,

$$L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \quad ; \quad L_3 \to L_3 + (-3)L_1 \quad ; \quad L_2 \to \frac{1}{7}L_2 \quad ;$$
$$L_3 \to L_3 + (-11)L_2 \quad ; \quad L_1 \to L_1 + 3\,L_2 \quad ; \quad L_3 \to (-\frac{7}{15})L_3 \quad ;$$
$$L_2 \to L_2 + \frac{5}{7}L_3 ; L_1 \to L_1 + \frac{1}{7}L_3 ,$$

respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.

Exercícios propostos – 3

1) Resolver o sistema $AX = B$, se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2) Classificar e resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 8y & = 34 \\ 10x + 16y & = 50 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - y - 3z & = 15 \\ 3x - 2y + 5z & = -7 \\ 2x + 3y + 4z & = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z & = 2 \\ 3x - 5y + 4z & = 5 \\ x - 2y - 7z & = -24 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x - 3y & = -18 \\ 2y + 5z & = -8 \\ x - 2y - 3z & = 0 \end{cases}$;

3) Resolver os sistemas abaixo pelo método matricial:

$$\begin{cases} -2x + 3y - z & = a_1 \\ x - 3y + z & = a_2 \\ -x + 2y - z & = a_3 \end{cases}$$

a) Para $a_1 = 2, a_2 = 5$ e $a_3 = 7$;

b) Para $a_1 = 1, a_2 = 6$ e $a_3 = 0$;

c) Para $a_1 = 2, a_2 = -8$ e $a_3 = 9$;

d) Para $a_1 = -4, a_2 = -3$ e $a_3 = -2$.

4) Encontre uma matriz não nula X tal que $AX = 3X$, onde

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5) Calcular x, y e z, de modo que

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados neste capítulo, consulte:

- ANTON, Howard. **Álgebra linear com apilcações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. Capítulos 1 e 2.
- MORETTIN, Pedro A., HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.

RESUMO

Nesta Unidade você identificou o conceito de matriz. Estudou os vários tipos de matrizes tais como: matriz linha, matriz quadrada, matriz transposta, matriz nula, matriz triangular, matriz simétrica etc. Aprendeu como calcular determinante de uma matriz quadrada e recordou os três tipos de operações com matrizes: adição, multiplicação e multiplicação com escalar. Esquematizou como calcular matriz inversa e apresentamos a noção de matriz escalonada. Finalmente você aplicou matrizes em resolução de sistemas de equações lineares.

RESPOSTAS

• Exercícios propostos – 1

1) a) $AB - BA = \begin{bmatrix} -16 & 17 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$;

b) $DE - ED = \begin{bmatrix} -5 & 12 & -20 \\ -15 & 6 & -69 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $C - D$ não existe;

d) $B^2 - A = \begin{bmatrix} 4 & -17 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}$;

e) $D^2 - E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

2) a) $CA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \\ -2 & -19 \end{bmatrix}$;

b) $AB = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 22 & -4 \\ -6 & 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

c) BC não existe;

d) $CB = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 & 2 \\ 11 & 3 & 20 & -5 \\ 21 & -15 & 14 & -13 \end{bmatrix}$.

3) a) $AB = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$;

b) $BA = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -11 & -6 & -22 \\ 27 & 16 & 40 \end{bmatrix}$;

c) $AC + A = \begin{bmatrix} -9 & -13 & 52 \\ -10 & -8 & 33 \end{bmatrix}$;

d) $AB - F = \begin{bmatrix} 20 & 21 \\ 24 & 3 \end{bmatrix}$;

e) $BA + CE = \begin{bmatrix} 58 & 40 & 52 \\ -60 & -34 & -55 \\ 55 & 4 & 42 \end{bmatrix}$;

f) $A(BD) = \begin{bmatrix} 16 & 98 \\ -30 & 70 \end{bmatrix}$;

g) $(AB)D = \begin{bmatrix} 16 & 98 \\ -30 & 70 \end{bmatrix}$;

h) $A(C + E) = \begin{bmatrix} 31 & 26 & 31 \\ 34 & 22 & 20 \end{bmatrix}$;

i) $AC + AE = \begin{bmatrix} 31 & 26 & 31 \\ 34 & 22 & 20 \end{bmatrix}$;

j) $(F + D)A = \begin{bmatrix} -17 & -10 & -26 \\ 35 & 19 & 71 \end{bmatrix}$.

4) a) $A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 5 & 27 \\ -9 & 32 \end{bmatrix}$;

b) $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{bmatrix} 54 & 15 \\ 21 & 7 \end{bmatrix}$;

c) $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 44 & 36 \\ 18 & 17 \end{bmatrix}$;

d) $AB^2 + BA = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ 19 & -12 \end{bmatrix}$;

e) $A^3 + 3A^2 + 3A + 2 = \begin{bmatrix} -8 & 180 \\ -60 & 172 \end{bmatrix}$;

f) $B^3 - 2B^2 - 3B + 4 = \begin{bmatrix} 36 & 8 \\ 24 & -12 \end{bmatrix}$.

5) a) $a = \frac{4}{3}; b = \frac{1}{3};\ c = -\frac{2}{3}$ e $d = -\frac{8}{3}$;

b) $a = -\frac{1}{2}; b = 3;\ c = -3$ e $d = -2$.

6) a) $(3D - F)^t D = \begin{bmatrix} 56 & -16 \\ -26 & 91 \end{bmatrix}$;

b) $A^t(D + F) = \begin{bmatrix} -8 & 27 \\ -4 & -18 \\ 24 & 36 \end{bmatrix}$;

c) $B^t A^t = \begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -10 & -21 \end{bmatrix}$;

d) $(2C)A^t = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & -42 \\ -8 & 48 \end{bmatrix}$;

e) $(B^t + A)A^t = \begin{bmatrix} 21 & 6 \\ -19 & 9 \end{bmatrix}$.

- **Exercícios propostos – 2**

1)
- *A* = MATRIZ([[1, 2, -3], [0, 5, 16], [0, 0, 236/5]]); det (*A*) = –236;
- B = MATRIZ([[2, 7, 3], [0, 2, 1], [0, 0, 11/4]]), det(C) = –11.

3)
- A^{-1} = MATRIZ([[2, 1, 0], [-9, -6, -2], [3, 2, 1]]);
- B^{-1} = MATRIX([[34/41, 7/41, -18/41], [11/41, -11/41, -1/41], [-3/41, 3/41, 4/41]]);
- Não existe a inversa de *C*;
- D^{-1} = MATRIZ([[-11, 9, 5], [9, -7, -4], [5, -4, -2]]);

4)
- *A* = MATRIZ([[-1/3, 2/3], [2/3, -1/3]]);
- *B* = MATRIZ([[2/7, 1/7], [3/7, -2/7]]);

- $(AB)^{-1}$ = MATRIZ([[4, 5], [-1, 4]]);
- $(BA)^{-1}$ = MATRIZ([[8, -3], [7, 0]]).

5) a) $x = 1$; b) $x = 1$, $x = 1/4$.

6)
- A = sim;
- B = sim;
- C = não;
- D = sim.

7) **Formas canônicas das matrizes:**
- A = MATRIZ([[1, 0, -2], [0, 1, 1], [0, 0, 0]]);
- B = MATRIZ([[1, 0, 1/-2], [0, 1, 3/2]]);
- C = MATRIZ([[1, 0, -1], [0, 1, 2]]).

- **Exercícios propostos – 3**

1) $x = 8, y = 2$.

2) a) não existe (inconsistente);
b) $x = 3,\ y = 3,\ z = -2$ (determinado);
c) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ (determinado);
d) $x = 0,\ y = 6,\ z = -4$ (determinado);

3) Solução geral: $x = -a_1 - a_2,\ y = -a_2 - a_3, z = a_1 - a_2 - 3a_3$.
a) $x = -7,\ y = -12, z = -24$;
b) $x = -7,\ y = -6, z = -5$;
c) $x = 6,\ y = -1, z = -17$;
d) $x = 7,\ y = 5, z = 5$.

4) a) $x = -\frac{1}{4}y = z$; b) $x = y = \frac{1}{2}z$

5) $x = \frac{128}{17}$, $y = \frac{121}{17}$, $z = -\frac{18}{17}$.

UNIDADE

3

Funções

Funções

Objetivo

Nesta unidade você vai, identificar os diferentes tipos de funções e suas operações; e aplicar funções na resolução de problemas em situações práticas.

Funções

Funções

Você, ao longo do curso, quando apresentado às disciplinas de Economia, terá oportunidade de fazer aplicações nos cálculos econômicos, a fim de poder entender melhor os problemas relacionados a economia. Este tema será aplicado nas disciplinas de Administração da Produção e Administração de Materiais. A partir deste momento, passaremos a nos preocupar com os aspectos das funções reais de uma variável real.

Um dos conceitos mais importantes da matemática é o conceito de função. Em muitas situações práticas, o valor de uma quantidade pode depender do valor de uma segunda. A procura de carne pelo consumidor, por exemplo, pode depender do seu preço atual no mercado. A quantidade de ar poluído, numa área metropolitana, depende do número de veículos na rua. O valor de uma garrafa de vinho, pode depender da safra. Essas relações são matematicamente representadas por funções.

Sejam A e B dois conjuntos. Uma função é uma relação em que a cada elemento de A, se associa um único elemento de B, e é indicada por $f : A \to B$.

A relação entre os conjuntos A e B é dada através de uma regra de associação expressa na forma $y = f(x)$.

Essa regra diz, que o elemento $x \in A$, chamado de variável independente, está relacionado de modo único ao elemento $y = f(x) \in B$, chamado de variável dependente. O conjunto A é chamado de domínio e indicamos $A = Dom(f)$ e o conjunto B, de contradomínio. O conjunto imagem, indicado como $\text{Im}(f)$ é o conjunto dos elementos de B aos quais foram associados elementos de A, isto é,

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}.$$

O número $y \in B, y = f(x)$ recebe o nome de valor da função f no ponto x.

Exemplo 3.1 *A função indicada por* $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ *tal que,* $y=f(x)=x^2+1$*, é a relação cujo domínio é* $[0,10]$ *e contradomínio é o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. A regra que associa a todo ponto* $x\in[0,10]$ *um único número real* $f(x)=x^2+1$*. O conjunto imagem é o conjunto dos números reais não negativos. Deste modo,*

$$f(0)=0^2+1=1,$$
$$f(1)=1^2+1=2,$$
$$f(6)=6^2+1=37,$$
$$f(10)=10^2+1=101.$$

Exemplo 3.2 *Sejam* $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 1\}$ *e* $f:A\to[0,+\infty)$ *tal que* $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$*, isto é, a regra que associa a todo ponto* $x\in A$ *o número real* $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ *em* $[0,+\infty)$*. Assim,*

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2,$$
$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{\frac{3}{4}-1}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}=-4,$$
$$f(0{,}99)=\frac{1}{0{,}99-1}=\frac{1}{-0{,}01}=-100,$$
$$f(3)=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2},$$
$$f(100)=\frac{1}{100-1}=\frac{1}{99}=0{,}0101.$$

Observação *Quando o domínio e o contradomínio de uma função estão contidos no conjunto dos números reais, a função é chamada de uma função real de variável real.*

Duas funções são iguais, somente quando têm os mesmos domínios, contradomínio e regra de associação.

Exemplo 3.3 *As funções* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, *e* $g:(-1,\ 1)\rightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$, *têm domínios* $Dom(f)=\mathbb{R}$ *e* $Dom(g)=(-1,\ 1)$. *Essas funções são distintas, pois têm domínios diferentes, apesar de terem a mesma regra de associação e o mesmo contradomínio. Os conjuntos imagem de ambas são também distintos:* $\mathrm{Im}(f)=[0,\ +\infty)$ *e* $\mathrm{Im}(g)=[0,\ 1)$.

Operações com funções

Sejam f e g duas funções definidas num mesmo conjunto A.

- **Soma das funções**

A função* s definida em A, tal que $s(x)=f(x)+g(x)$ recebe o nome de função SOMA de f e g.

Exemplo 3.4 *Se* $f(x)=x^3$ *e* $g(x)=3x^2+2$, *com* $x\in\mathbb{R}$, *então a função* s *definida em* $\mathbb{R}$, *tal que* $s(x)=x^3+3x^2+2$ *é a soma de* f *e* g.

- **Produto de funções**

A função p definida em A, tal que $p(x)=f(x).g(x)$ recebe o nome de ***função produto*** de f e g.

Exemplo 3.5 *Se* $f(x)=x^3$ *e* $g(x)=3x^2+2$, *com* $x\in\mathbb{R}$, *então a função* p *definida em* $\mathbb{R}$, *tal que* $p(x)=x^3.(3x^2+2)=3x^5+2x^3$ *é o produto de* f *e* g.

- **Divisão de funções**

Se $g(x)\neq 0$ para todo $x\in A$, a função q definida em A, tal que $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é o quociente de f e g.

Exemplo 3.6 *Sejam* $f(x)=x^4$ *e* $g(x)=x^4+2$, *com* $x\in\mathbb{R}$. *A função* q *definida em* $\mathbb{R}$, *tal que* $q(x)=\dfrac{x^4}{x^4+2}$ *é o quociente das funções* f *e* g.

GLOSSÁRIO

Função*: Na Matemática, função significa uma relação (com algumas características determinadas) entre membros de dois ou mais conjuntos. Funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos, *x* e *y*. O objeto *x* é chamado o argumento da função *f* e o objeto y que depende de *x* é chamado imagem de *x* pela *f*.
Função: Em Administração, função é o que relaciona determinado componente ao objetivo de um sistema administrativo. Exemplo: função marketing.

Gráfico de uma função

O gráfico de uma função $f : A \rightarrow B$, dada como $y = f(x)$, é o conjunto dos pontos do plano, cujas coordenadas no sistema cartesiano retangular são dadas por $(x, f(x))$, onde $x \in A$. Para isto, construímos um quadro $(x, f(x))$, atribuindo a x valores convenientes.

Vejamos alguns exemplos de gráficos:

Exemplo 3.7 *Representar graficamente a função* $y = f(x) = 3 - x$, $x \in [0,3]$.

Resolução: Temos o seguinte quadro:

x	0	1	2	3
$y = f(x) = 3 - x$	3	2	1	0

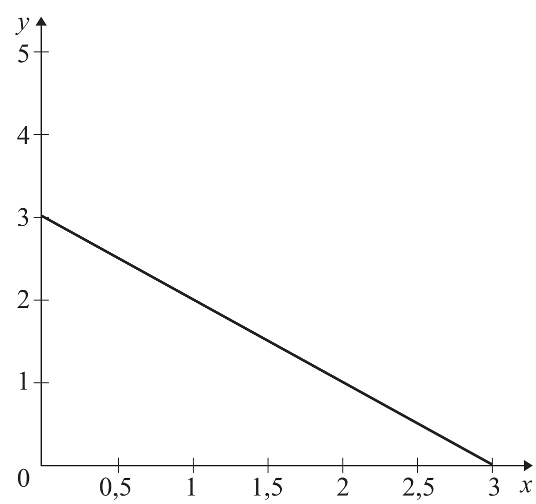


Figura 3.1

Exemplo 3.8 *Representar graficamente a função* $y = f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

Resolução: Temos o seguinte quadro:

x	1	2	5	10	.	.	.
$y = f(x) = \sqrt{x-1}$	0	1	2	3	.	.	.

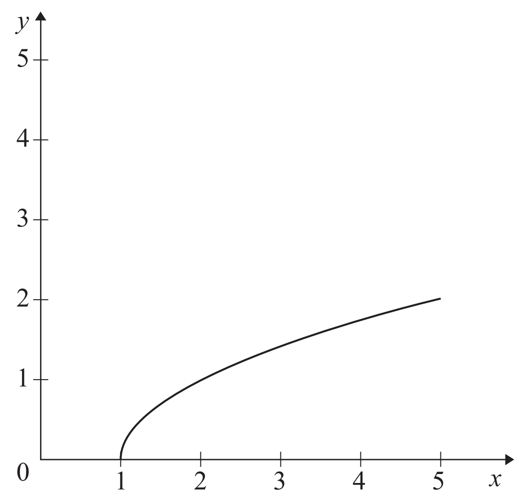


Figura 3.2

Exemplo 3.9 *Representar graficamente a função:*

$$y = f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \le 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Resolução: Tendo $x \le 0$, $y = f(x) = 2$ e para $x > 0$, $y = f(x) = x$, construímos o seguinte quadro.

x	.	.	.	-2	-1	0	1	2	.	.	.
y	.	.	.	2	2	2	1	2	.	.	.

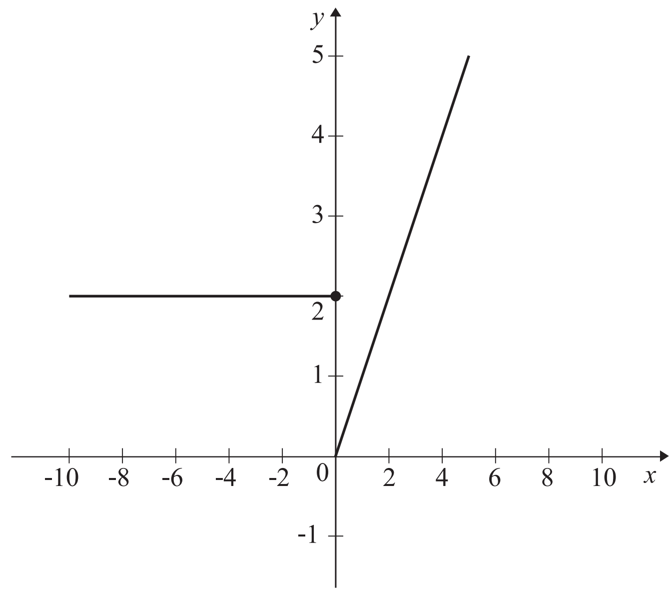


Figura 3.3

Uma função f tal que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in Dom(f)$, é chamada de função par. Quando $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in Dom(f)$, a função é chamada de função ímpar.

Exemplo 3.10 *A função $f:[-2,\ 2] \to \mathbb{R}$, dada pela $f(x) = x^2$ é par, pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in [-2,\ 2]$. A função $f(x) = x^3, x \in [-2,\ 2]$, é ímpar. De fato, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.*

Observação *Quando uma função é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Y. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, y)$ também pertence. Quando uma função é ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, -y)$ pertence também ao gráfico.*

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure então, resolver os exercícios propostos.

Exercícios propostos – 1

1) Representar graficamente as funções dadas por:

a) $f:[0,\ 3] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.

b) $y = 5 - 3x, x \in [-4,3]$.

c) $y = x^2 - 4x, x \in [0,4]$.

d) $y = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

e) $y = \dfrac{1}{3 - x}, x > 3$.

2) Verifique se as funções dadas são iguais:
$A = \{x \in \mathbb{R},\ /\ x > 0\}$ e $B = \mathbb{R},\ f(x) = x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

3) Dadas as funções $f(x) = x^3 + 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 2x + 5$, $x \in (0,\ \infty)$, obtenha as funções soma, produto e quociente de f com g.

Agora, vamos estudar alguns tipos de função.

Se ao final deste primeiro estudo sobre funções (e demais tópicos) tratados até aqui você continua com dúvidas ou não conseguiu resolver os exercícios propostos, não desista! Releia o material, veja os exemplos mais uma vez, refaça os exercícios! Consulte as referências na bibliografia. E busque esclarecimentos junto ao Sistema de Acompnhamento

Funções elementares

A seguir apresentaremos algumas funções elementares.

- **Função constante**

A função que associa cada elemento do seu domínio a um mesmo elemento do contradomínio, é chamada de função constante.

Exemplo 3.11. *A função* $f:[0,\ \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$, *é uma função constante. Seu gráfico no intervalo* $\left[0,\ 2\right]$ *do seu domínio é o seguinte:*

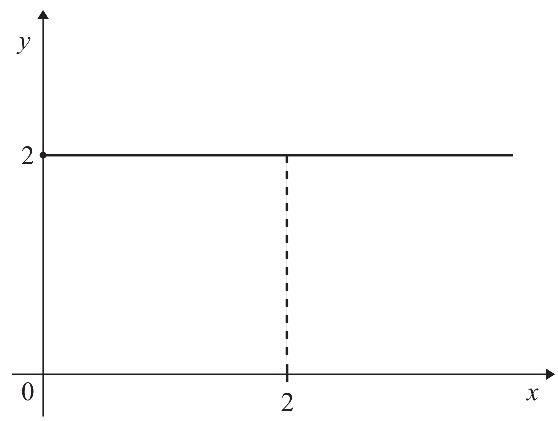


Figura 3.4: NO INTERVALO $\left[0,\ 2\right]$

- **Funções afim e linear**

Chama-se função afim qualquer função dada por $f(x) = ax + b$, onde os coeficientes a e b são números reais dados. Quando $b = 0$, a função é chamada de linear. O gráfico da função afim com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$ é uma reta com coeficiente angular igual a a, e que intercepta os eixos coordenados X e Y nos pontos $\left(-\dfrac{b}{a},\ 0\right)$ e $\left(0,\ b\right)$, respectivamente.

Exemplo 3.12 *O gráfico da função afim, tomando-se* $a = 1$ *e* $b = -1$, *ou seja,* $y = f(x) = x - 1$, *no intervalo* $[-1,\ 2]$, *é mostrado a seguir.*

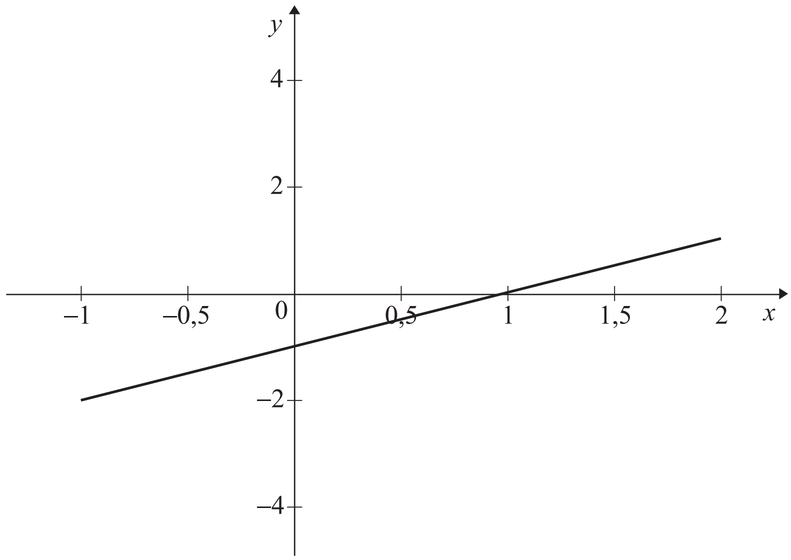


Figura 3.5

Uma reta pode ser representada por uma função afim da forma $y = ax + b$. Precisamos apenas determinar a e b.

- **Função módulo**

É a função definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

O gráfico da função módulo é o seguinte:

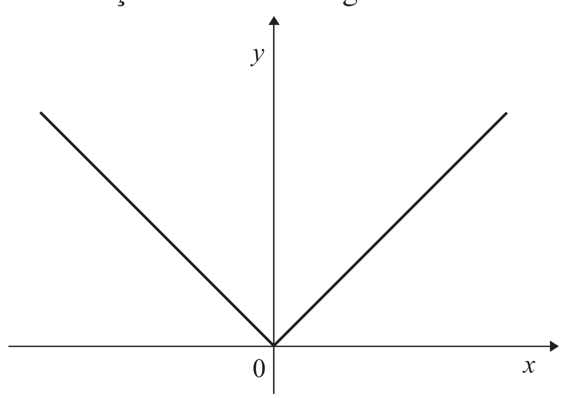


Figura 3.6

- **Função quadrática**

Sejam a, b e c números reais quaisquer, com $a \neq 0$. A função f, definida em $\mathbb{R}$ e dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ recebe nome de função quadrática.

Exemplo 3.13

(i) $y = f(x) = x^2 - 9x + 14$ $\qquad a = 1; b = -9; c = 14$.

(ii) $y = f(x) = 5x^2 + 25x$ $\qquad a = 5; b = 25; c = 0$.

(iii) $y = f(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{5}$ $\qquad a = -\dfrac{2}{3}; b = \dfrac{3}{4}; c = -\dfrac{1}{5}$.

- **Função polinomial**

É toda função cuja regra de associação é um polinômio, ou seja,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais e n é um número natural, chamado de grau de $f(x)$.

Exemplo 3.14 *As funções afim e linear são exemplos de funções polinomiais de grau* $n = 1$. *A função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *é uma função polinomial de grau* $n = 2$. *A função* $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ *é uma função polinomial de grau* $n = 4$.

- **Função racional**

É toda função f, cuja regra de associação é do tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ ($q(x) \neq 0$) são funções polinomiais. Uma função racional está definida em qualquer domínio que não contenha raízes do polinômio $q(x)$.

Exemplo 3.15 *Determine o maior domínio possível da função racional*

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Resolução: Uma função racional, com esta regra de associação, está definida em todo ponto x, tal que $x + 1 \neq 0$. Portanto, o maior domínio possível é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

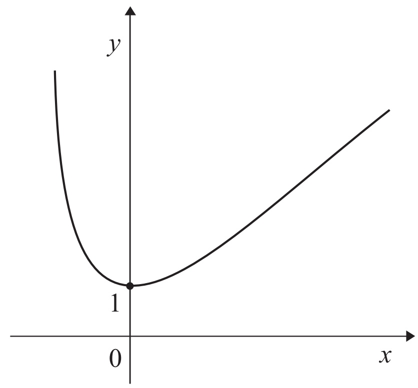


Figura 3.7

Função exponencial e logarítmica

Função exponencial de base a

Seja a um número positivo e $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, dada por $f(x) = a^x$, é chamada de função exponencial de base a. Os gráficos dessas funções, são os seguintes:

Gráfico da função exponencial quando $a > 1$.

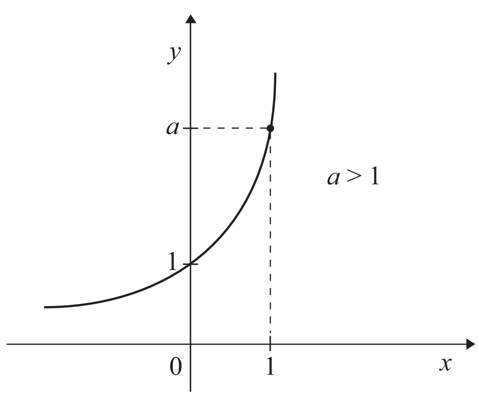


Figura 3.8

Gráfico da função exponencial, quando $0 < a < 1$.

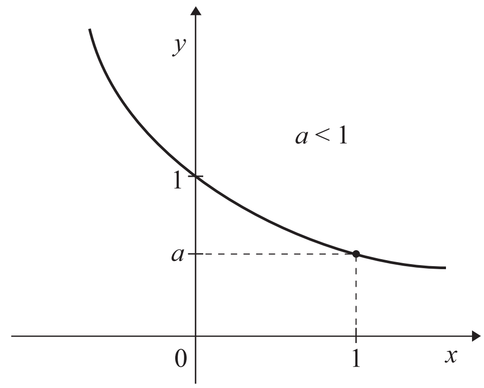


Figura 3.9

O conjunto imagem da função exponencial é o intervalo $(0, +\infty)$. Apresentaremos, a seguir, as propriedades de exponenciação.

- **Propriedades da função exponencial**

As seguintes propriedades valem para quaisquer $a, b, x, y \in R$ com $a > 0, b > 0$:

P1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

P2. $(a^x b^x) = (ab)^x$.

P3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

P4. $\left(\dfrac{a^x}{b^x}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

P5. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.

A função exponencial mais comum em aplicações é a função exponencial de base $a = e$ onde $e = 2{,}71828...$ é a constante de Euler, que é um número irracional. A função, nesse caso, é chamada de função exponencial natural ou, simplesmente, função exponencial.

Função logaritma

Seja a um número positivo e $a \neq 1$. A função definida por $y = f(x) = \log_a x \ x > 0$, recebe o nome de função logarítmico de base a.

Vejamos os gráficos da função logarítmica:

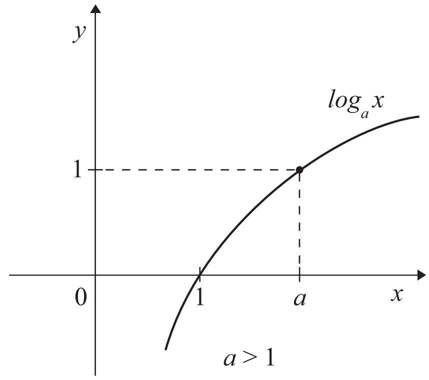


Figura 3.10

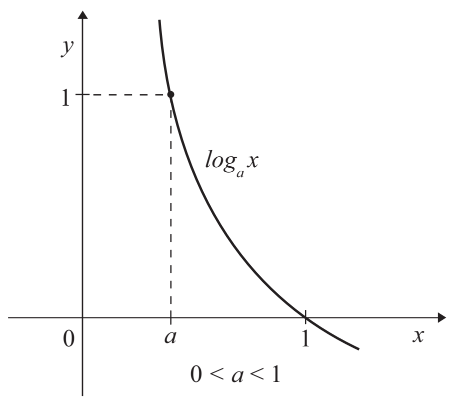


Figura 3.11

- **Propriedades da função logaritma**

Para todo $x, y > 0$, valem as seguintes propriedades.

P1. Propriedade do produto:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

P2. Propriedade do quociente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

P3. Propriedade da potenciação:

$$\log_a(y^x) = x \log_a y.$$

O logaritmo, na base $a = e$, é chamado de logaritmo natural e é comum indicá-lo como $\ln x$.

Função composta

Dadas as funções f e g, a *função composta*, denotada por $F(x) = f \circ g$, é definida por

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

Geralmente,

$$f \circ g \neq g \circ f .$$

Exemplo 3.16 *Sejam f a função definida por $\sqrt{x-1}$ e g por $g(x) = x + 5$. Determinar*

a) $F(x) = f \circ g$, e determine o domínio de F.
b) $G(x) = g \circ f$, e determine o domínio de G.

Resolução:

a)

$$F(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x+5\big) = \sqrt{x+5-1} = \sqrt{x+4}$$

O domínio de g é $\big(-\infty, +\infty\big)$, e domínio de f é $\big[1, +\infty\big)$. Assim sendo o domínio de F é o conjunto dos números reais, para os quais $x + 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq -4$, ainda, $\big[-4, +\infty\big)$.

b) $G(x) = \big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x-1}\big) = \sqrt{x-1} + 5$.

Como o domínio de f é $\big[1, +\infty\big)$. E o domínio de g é $\big(-\infty, +\infty\big)$, o domínio de G é $\big[1, +\infty\big)$.

Exemplo 3.17 *Sejam* f *a função definida por* $f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ *e* g *por* $g(x) = x^2 - 4$. *Determinar*

a) $F(x) = f \circ g$ *, e determine o domínio de* F *.*
b) $G(x) = g \circ f$ *, e determine o domínio de* G *.*

Resolução:
a) $F(x) = \left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x^2 - 4\right) = \left(x^2 - 4\right)^{-2}$.

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e o domínio de f é $\mathbb{R} - \left\{0\right\}$. Assim sendo, o domínio de F é o conjunto dos números reais, tal que $x \neq \pm 2$.

b) $G(x) = \left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^4} - 4$.

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e o domínio de f é $\mathbb{R} - \left\{0\right\}$. Assim sendo, o domínio de G é $\mathbb{R} - \left\{0\right\}$.

Exemplo 3.18 *Sejam* f *a função definida por* $f(x) = \log x$ *e* g *por* $g(x) = x - 5$. *Determinar*

a) $F(x) = f \circ g$ *, e determine o domínio de* F *.*
b) $G(x) = g \circ f$ *, e determine o domínio de* G *.*

Resolução:
a) $F(x) = \left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x - 5\right) = \log\left(x - 5\right)$.

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e o domínio de f é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\right\}$. Assim sendo, o domínio de F é o conjunto dos números reais tal que $x > 5$.

b) $G(x) = \left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\log x\right) = \log x - 5$.

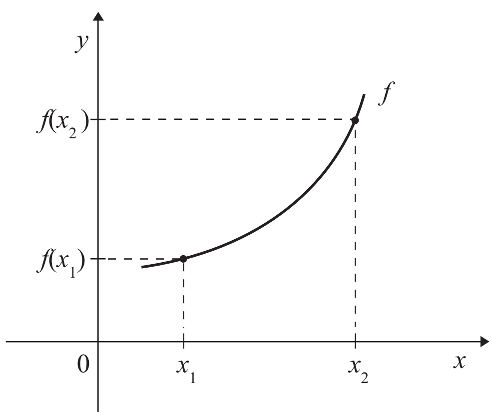
O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e odomínio de f é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\right\}$ Assim sendo, o domínio de G é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\right\}$.

Funções crescentes e decrescentes

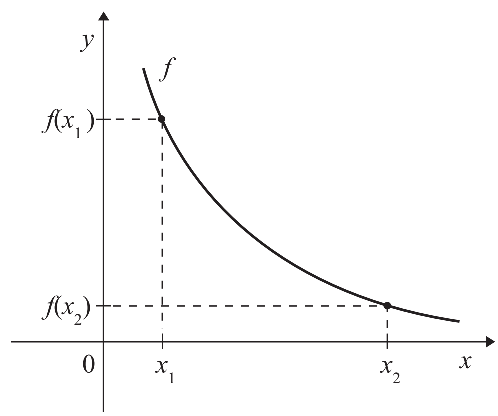
Seja I um intervalo qualquer da reta e f uma função definida em I. Sejam x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$ dois pontos quaisquer de I.

Dizemos que f é uma função crescente em I, quando $f(x_1) \leq f(x_2)$, ou seja, à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo I, as imagens correspondentes também aumentam.

Analogamente, dizemos que f é uma função decrescente em I quando $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou seja, à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo I, as imagens correspondentes vão diminuindo. A figura 3.12 ilustra essas duas situações



função crescente
$x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$



função decrescente
$x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$

Figura 3.12

Exemplo 3.19 *A função da figura 3.8,* $f(x) = a^x$, $a > 1$ *é uma função crescente para qualquer número real* x. *A função da figura 3.11,* $y = f(x) = \log_a x$, $x > 0$ *e* $0 < a < 1$ *é uma função decrescente para todo* $x > 0$.

Função inversa

Uma função $f : A \to B$ é inversível quando a relação inversa da f também é uma função. Nesse caso, diz-se que a f tem função inversa $f^{-1} : B \to A$. Dada uma função $f : A \to B$, $y = f(x)$, a relação inversa da f e indicaremos por $x = f^{-1}(y)$.

- **Propriedades da função inversa**

Seja f uma função inversível e f^{-1} a sua inversa. Então, temos as seguintes propriedades:

P1. $Dom(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$;

P2. $\mathrm{Im}(f^{-1}) = Dom(f)$;

P3. Seja $f : A \to B$ uma função inversível. A função $g : B \to A$ é função inversa da f, quando para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se $g\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(g(y)\big) = y$.

P4. O gráfico da f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta diagonal $y = x$. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico da f, então o ponto (y, x) pertence ao gráfico da f^{-1}.

Exemplo 3.20 *As funções $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, e $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(y) = \sqrt{y}$, são inversas uma da outra, pois*

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x, \forall x \in Dom(f),$$

e

$$f(g(y)) = (g(y))^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y, \forall y \in Dom(g), \text{ onde } g = f^{-1}.$$

Note que,

$$Dom(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \text{ e } \mathrm{Im}(f^{-1}) = Dom(f).$$

- **Regra Prática**

Dada a regra de associação da f, $y = f(x)$. Para se obter a regra que define f^{-1}, procede-se assim:

1º: A partir de $y = f(x)$, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º: Expressamos y em função de x, transformando algebricamente a expressão $x = f(y)$ em $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo 3.21 *Seja* $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $y = f(x) = 3x - 5$. *Determine a função inversa* $f^{-1}(x)$.

Resolução: Vamos aplicar a regra prática.

1º: Trocando x por y e y por x, vem $x = 3y - 5$;

2º: Expressando y em função de x, vem

$$x = 3y - 5 \Rightarrow 3y = x + 5 \Rightarrow y = \frac{x+5}{3} = f^{-1}(x).$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$ é a função inversa de $y = f(x) = 3x - 5$.

Exemplo 3.22 *Seja* $f:\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$ *definida por*

$$y = f(x) = \frac{2x-3}{5x-7}.$$

Determine a função inversa $f^{-1}(x)$.

Resolução: Aplicando a regra prática, temos

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{2x-3}{5x-7} &\Rightarrow x = \frac{2y-3}{5y-7} \\ &\Rightarrow x(5y-7) = 2y-3 \\ &\Rightarrow 5xy - 7x = 2y - 3 \\ &\Rightarrow 5xy - 2y = 7x - 3 \end{aligned}$$

Logo,

$$y\left(5x-2\right)=7x-3 \Rightarrow y=\frac{7x-3}{5x-2}=f^{-1}(x).$$

Portanto, $f^{-1}(x)=\dfrac{7x-3}{5x-2}$ é a função inversa de $y=f(x)=\dfrac{2x-3}{5x-7}$.

Exemplo 3.23 *O número* x *de certo produto, demandado numa loja, relaciona-se com o preço unitário* $\left(p\right)$, *conforme a função demanda* $p=\dfrac{21-x}{3}$. *Determine a função inversa da função demanda* p, *ou seja, determine o preço em função da quantidade demandada.*

Resolução: Como $p>0$ devemos ter $\dfrac{21-x}{3}>0 \Rightarrow 21-x>0 \Rightarrow 21>x$ ou $0<x<21$. Aplicando a regra prática, temos

$$p=\frac{21-x}{3} \Rightarrow x=\frac{21-p}{3} \Rightarrow 3x=21-p \Rightarrow p=21-3x, \text{ para } 0<x<7.$$

Portanto, $p=21-3x$ é a função inversa de $p=\dfrac{21-x}{3}$.

Exemplo 3.24 *Determinar a função inversa da função demanda*

$$p=\sqrt{\frac{144-x}{9}}.$$

Resolução: Como $x>0$, devemos ter

$$\sqrt{\frac{144-x}{9}}>0 \Rightarrow \frac{144-x}{9}>0 \Rightarrow 144-x>0 \Rightarrow 144>x \text{ ou}$$

$$0<x<144.$$

Assim,

$$p=\sqrt{\frac{144-x}{9}}=\left(\frac{144-x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow p^2=\left(\left(\frac{144-x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{144-x}{9},$$

ou seja,

$$p^2=\frac{144-x}{9}.$$

Aplicando a regra prática, temos

$$p^2 = \frac{144 - x}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{144 - p}{9} \Rightarrow 9x^2 = 144 - p \Rightarrow p = 144 - 9x^2$$

$$p = 144 - 9x^2 > 0 \Rightarrow 144 > 9x^2 \Rightarrow$$
$$12^2 > 3^2 x^2 \Rightarrow 12 > 3x \Rightarrow \frac{12}{3} > x \Rightarrow 4 > x,$$

ou,

$$0 < x < 4.$$

Portanto, $p = 144 - 9x^2$ é a função inversa de $p = \sqrt{\dfrac{144 - x}{9}}$.

Funções trigonométricas

- **A função seno e a função cosseno**

Considere a circunferência de raio unitário e centro na origem do sistema ortogonal de coordenadas, chamada de círculo trigonométrico.

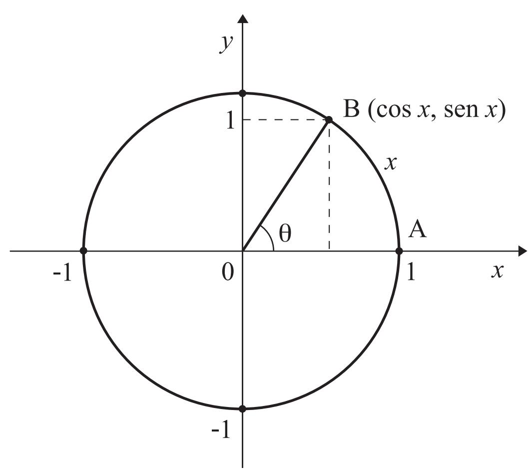


Figura 3.13: O Círculo Trigonométrico

Vamos convencionar o seguinte: o ponto A é a origem dos arcos sobre a circunferência, e o comprimento x de um arco é positivo quando o mesmo é obtido a partir de A, deslocando-se, no sentido anti-horário e, negativo, se no sentido horário.

Chama-se função seno a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indicada como $f(x)=sen x$, que associa a cada número real x, entendido como o comprimento de um arco $\widehat{AB}$ da circunferência, a ordenada do ponto B no eixo *y*.

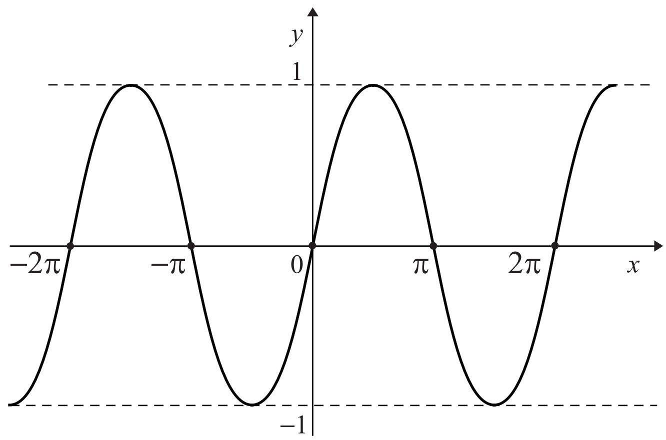


Figura 3.14: Gráfico da função seno.

A função cosseno é a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ indicada por $f(x)=\cos x$, que associa cada número real x, entendido aqui também como o comprimento de um arco $\widehat{AB}$ da circunferência unitária, a abcissa do ponto B no eixo $0X$.

Gráfico da função cosseno:

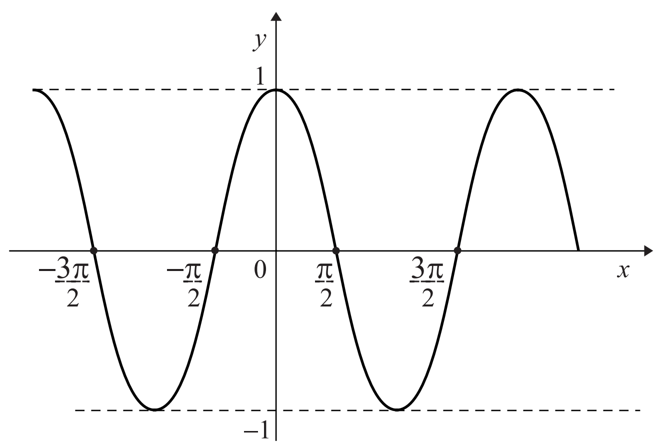


Figura 3.15: Gráfico da função cosseno.

Sendo x o comprimento de um arco $\widehat{AB}$ da circunferência unitária, a ordenada e a abcissa de B, $sen x$ e $\cos x$, são no máximo 1 e, no mínimo, -1, qualquer que seja x, como se constata examinando-se a figura acima.

Uma função $f(x)$ é chamada de periódica, quando satisfaz para algum p, a relação $f(x) = f(x+p)$, qualquer que seja $x \in Domf$. O menor valor de p, para o qual se tem $f(x+p) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é chamado de período da função f.

As funções seno e cosseno são funções periódicas com período 2π, ou seja,

$$\text{sen}\left(x + 2\pi\right) = \text{sen}\ x \text{ e } \cos\left(x + 2\pi\right) = \cos x$$

As funções $\text{sen}\ x$ e $\cos x$ satisfazem algumas relações, chamadas **relações ou identidades trigonométricas**:

(i) $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$.

(ii) $\text{sen}\left(a + b\right) = \text{sen}\ a \times \cos b + \cos a \times \text{sen}\ b$.

(iii) $\cos\left(a + b\right) = \cos a \times \cos b - \text{sen}\ a \times \text{sen}\ b$.

(iv) $\text{sen}(2a) = 2 \times \text{sen}\ a \times \cos a$.

(v) $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$.

(vi) $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$.

(vii) $\text{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

- **Função tangente**

A função $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}\ x$, definida por

$$\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x},$$

onde $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\right\}$ é chamada de função tangente.

A função tangente é periódica. Seu período é π.

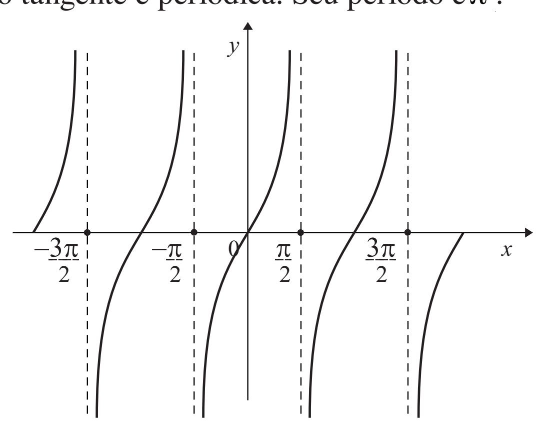


Figura 3.16: Gráfico da função tangente.

- **Função secante**

É a função $f : A \to \mathbb{R}$, indicada por $f(x) = \sec x$, onde

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ e } A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\right\}$$

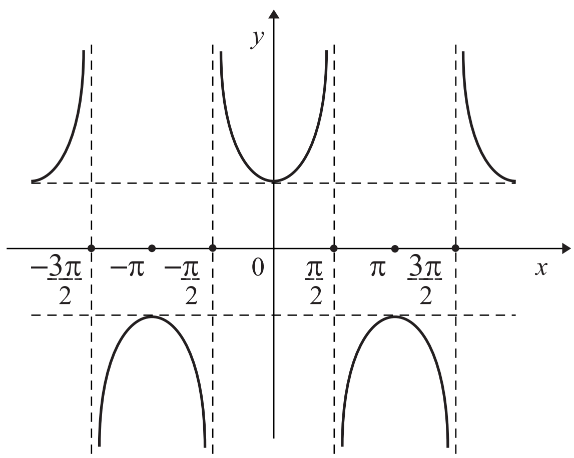


Figura 3.17: Gráfico da função secante

A função secante é uma função par e periódica com período 2π. Seu conjunto imagem é

$$\text{Im}(\sec x) = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty).$$

- **Função cossecante**

É a função $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é o conjunto dos números reais x, tais que $senx \neq 0$, dada por

$$f(x) = \cos\sec x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Vejamos, agora, o gráfico da função cossecante:

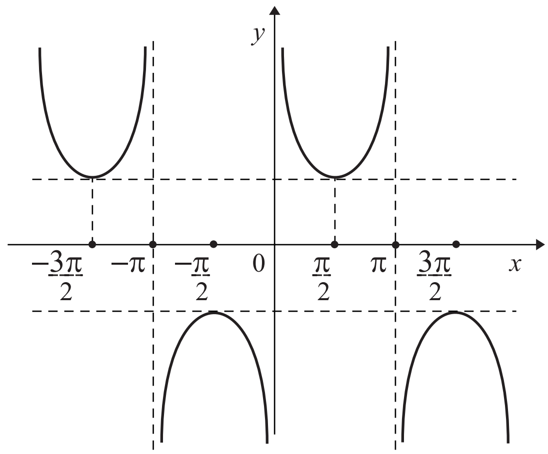


Figura 3.18: Gráfico da função cossecante.

A função $\cos\sec x$ é uma função periódica com período 2π. Seu conjunto imagem é o conjunto:

$$\mathrm{Im}(\cos\sec x) = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ \infty)$$

- **Função cotagente**

A função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

onde A é o conjunto dos números reais x, tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$, é chamada função cotangente.

Vejamos, agora, o gráfico da função cotangente:

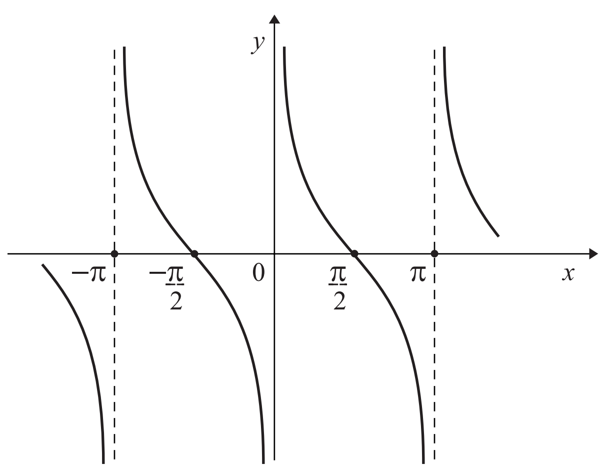


Figura 3.19: Gráfico da função cotangente.

A função cotangente é uma função periódica de período π e $\text{Im}(\text{cotg } x) = \mathbb{R}$.

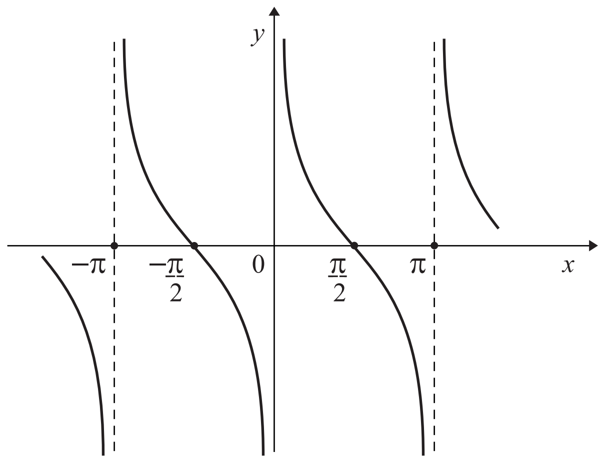


Figura 3.20: Gráfico da função arco secante.

Observação 3.3 *Na literatura existem as funções trigonométricas inversas, mas nesse trabalho não faremos, estudo destas funções.*

Aplicações práticas das funções

A seguir, apresentaremos algumas aplicações práticas de funções em forma de exemplos.

- **Função receita**

Exemplo 3.25 *Um bem é vendido por R\$300,00 a unidade. Sendo x a quantidade vendida, a receita de vendas será* $300 \times x$. *Podemos dizer que* $R(x) = 300 \times x$ *é uma função que fornece a quantidade vendida x à receita correspondente.*

Exemplo 3.26 *Uma sorveteria vende um picolé por R\$6,00. Seja* x *a quantidade vendida.*

a) obtenha a função receita $R(x)$ *;*

b) calcule $R(50)$ *;*

c) qual a quantidade que deve ser vendida para dar uma receita igual a R$1.200,00?

Resolução:

a) $R(x) = 6 \times x$.

b) $R(50) = 6 \times 50 = 300$.

c) Devemos ter $1.200 = 6 \times x \;\Rightarrow\; x = 200$.

Logo, a quantidade vendida deve ser de 20 picolés.

- **Função Custo e Lucro do Primeiro Grau**

Seja x a quantidade produzida de um produto. O custo total de produção depende de x, e a relação entre eles é chamada de função custo total e a indicamos por $C(x)$. Existem custos que não dependem da quantidade produzida, tais como, aluguel, seguro e outros. À soma desses custos (que não dependem da quantidade produzida) chamamos de custo fixo e indicamos por CF ; a parcela do custo que depende de *x,* chamamos de custo variável, e indicamos por $CV(x)$. Logo, podemos escrever:

$$C(x) = CF + CV(x).$$

A função lucro $L(x)$ é definida como a diferença entre a função receita $R(x)$ e a função custo $C(x)$, e temos

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

Por exemplo, o custo fixo mensal de fabricação de um produto é R$6.000,00 e o custo variável por unidade é R$ 15,00. Então a função custo total é dada por

$$C(x) = 6.000 + 15x.$$

Se o produto for, digamos, número de aparelhos de TV, os valores de x serão 0, 1, 2,...

Caso o produto for, digamos, toneladas de soja produzidas, os valores de x serão números reais positivos.

Exemplo 3.27 *Um produto é vendido por R$20,00 a unidade (preço constante). A função receita será* $R(x) = 20x$ *. Se colocarmos o gráfico* *da função receita e o da função custo* $C(x) = 6.000 + 15x$ *num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, teremos o gráfico a seguir:*

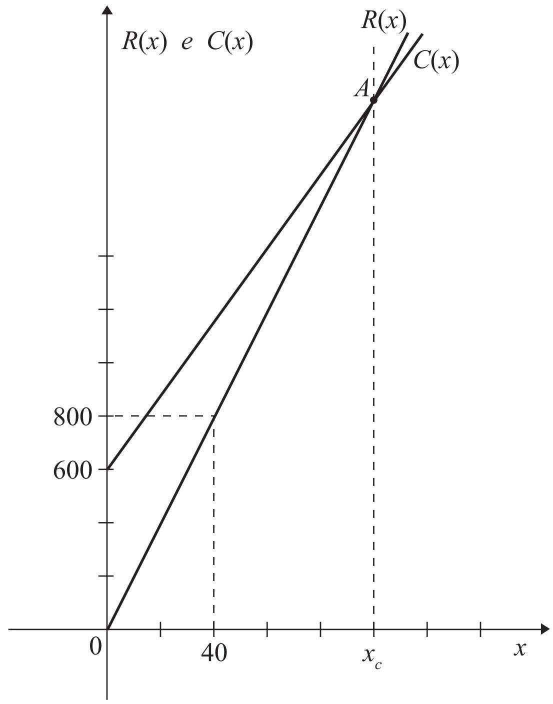


Figura 3.21: Gráfico de $R(x) = 20x$ e $C(x) = 6.000 + 15x$ no mesmo sistema de coordenadas.

A abscissa, x_c, do ponto A é chamada de ponto de nivelamento ou ponto crítico.

Note que:

- Se $x > x_c$, então $R(x) > C(x)$ e $L(x) > 0$.
- Se $x < x_c$, então $R(x) < C(x)$ e $L(x) < 0$.

- **Função demanda**

Exemplo 3.28 *O número* x *de certo produto demandado por mês numa loja, relaciona-se com o preço unitário* (p), *conforme a função demanda*

$$p = 20 - 0{,}004x .$$

Se o preço por unidade for de R\$8,00, a quantidade demandada por mês será

$$8 = 20 - 0{,}004x \Rightarrow 0{,}004x = 20 - 8 = 16 \;\Rightarrow\; x = 4.000 .$$

O gráfico da função demanda $p = 20 - 0{,}004x$, *é dado a seguir:*

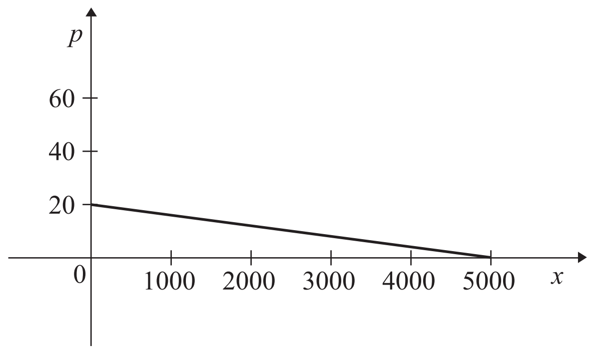


Figura 3.22

- **Funções quadráticas receita e lucro**

Exemplo 3.29 *A função de demanda de certo produto é* $p = 20 - x$, *e a função custo é* $C(x) = 30 + x$, *onde* x *é a quantidade demandada. Determinar:*

a) a função receita e o preço que a maximiza.

b) a função lucro e o preço que o maximiza.

Resolução:

a) Por definição de receita, temos

$$R(x) = p \times x = \left(20 - x\right) \times x = 20x - x^2 .$$

Logo, a função receita é $R(x) = -x^2 + 20x$. Veja o gráfico abaixo

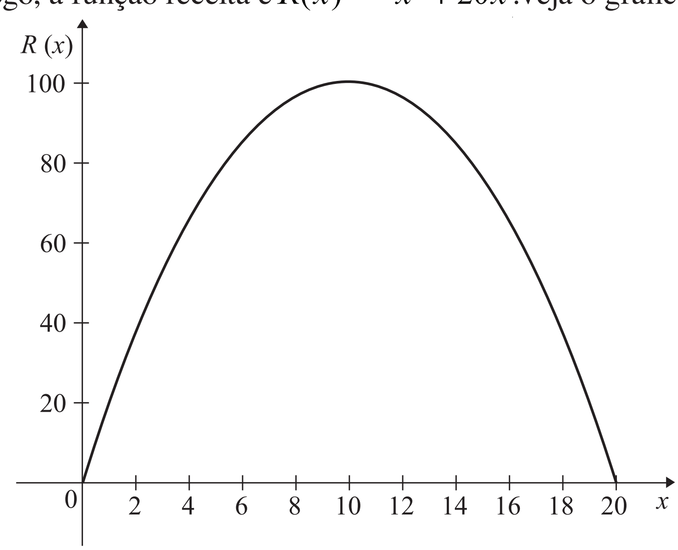


Figura 3.23

De $R(x) = -x^2 + 20x$, temos $a = -1; b = 20; c = 0$.

Logo, o valor de x que maximiza $R(x) = -x^2 + 20x$ é a abscissa do vértice $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \times (-1)} = 10$, para uma receita máxima de

$$R(10) = -(10)^2 + 20 \times 10 = -100 + 200 = 100.$$

Portanto, temos uma receita máxima de R$100,00 para uma demanda de $x = 10$ itens do produto.

b) A função lucro é $L(x) = R(x) - C(x)$.

Assim,

$$L(x) = 20x - x^2 - (30 + x) = 20x - x^2 - 30 - x =$$

$$-x^2 + 19x - 30,$$

onde

$$a = -1;\; b = 19;\; c = -30.$$

Veja o gráfico de $L(x)$ abaixo

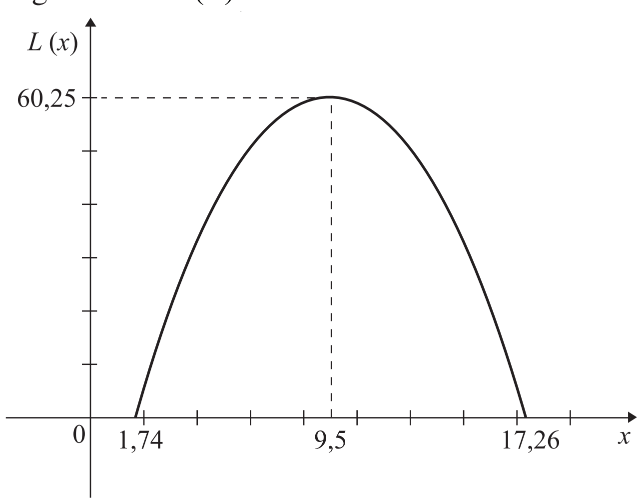


Figura 3.24

O valor de x, que maximiza a função lucro $L(x) = -x^2 + 19x - 30$, é a abscissa do vértice $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{19}{2 \times (-1)} = \frac{19}{2} = 9,5$ para um lucro máximo de

$$\begin{aligned} L(9,5) &= -(9,5)^2 + 19 \times 9,5 - 30 \\ &= -90,25 + 180,5 - 30 = 60,25 \end{aligned}.$$

Portanto, temos um lucro máximo de R$240,75.

Exercícios propostos – 2

1) Seja a função $f(x) = 4x - 3$, calcule:

a) $f(-2)$;

b) $f(a+1)$;

c) $f(x+h)$;

d) $f(x) + f(h)$;

e) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$.

2) Seja a função $g(x) = 5x^2 - 4x$, calcule:

a) $g(-1)$;

b) $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

c) $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}, h \neq 0$;

d) $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

e) $\dfrac{g(-2)}{g(x)}$.

3) Seja a função $f(x) = 2x - |x - 3|$, calcule:

a) $f(-1)$;

b) $f(2)$;

c) $f(3)$;

d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;

e) $f(2x)$.

4) Faça o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2$, com o $Dom(f) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

5) Obtenha o domínio das seguintes funções:

a) $y = f(x) = 3x - 2$;

b) $y = f(x) = \sqrt{3 - x}$;

c) $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x-2}$.

6) Esboce o gráfico da função f , de domínio $Dom(f) = \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

7) Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determine:

a) $f \circ g$ e $Dom(f \circ g)$.

b) $g \circ f$ e $Dom(g \circ f)$.

c) $f \circ f$ e $Dom(f \circ f)$.

8) O custo de fabricação de x unidades de certo produto é dado pela função $C(x) = 300 + 2x$.

a) Qual o custo de fabricação de 30 unidades?

b) Qual o custo de fabricação da vigésima unidade, já tendo sido fabricadas dezenove unidades?

9) Dada a função demanda $p = 20 - 2x$ e a função custo $C(x) = 5 + x$, determine:

a) O valor de x que maximiza a receita.

b) O valor de x que maximiza o lucro.

10) Usando o mesmo sistema de coordenadas cartesianas, esboce o gráfico da função receita, dada por $R(x) = 4x$ e o gráfico da função custo, dada por $C(x) = 50 + 2x$ e determine o ponto de nivelamento.

11) Obtenha a função lucro do exercício acima, esboce seu gráfico e faça o estudo do sinal.

12) Um fabricante de brinquedos pode produzir um determinado brinquedo a um custo de R$10,00 por unidade. Está estimado que se o preço de venda do brinquedo for de x cada, então o número de brinquedos vendidos por mês será $250 - x$.

a) Expressar o lucro mensal do fabricante como uma função de x .

b) Utilize o resultado da letra a para determinar o lucro mensal se o preço de venda for de R$35,00 cada.

13) Seja $f:[0,\ \infty) \to [-2,\ \infty)$, $y = f(x) = x^2 - 2$. Determine a inversa da função f .

14) Determinar a função inversa da função demanda $p = \dfrac{20 - \sqrt{x}}{4}$.

15) Indicando o custo médio correspondente a x unidades produzidas por $CM(x)$, temos $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ onde $C(x)$ é o custo de fabricação de x unidades de um produto. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 400 + 5x$.

a) Qual o custo médio de fabricação de 80 unidades?

b) Qual o custo médio de fabricação de 100 unidades?

c) Para que valor tende o custo médio à medida que x aumenta?

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados nesta Unidade, consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração. 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORENTTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BuSSAB, Winton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Nesta Unidade, você teve a oportunidade de estudar e compreender que uma função é uma relação entre conjuntos, que associa cada elemento de um dos conjuntos um único elemento do outro conjunto. Você aprendeu as operações com funções e a esboçar o gráfico de uma função. Também estudou algumas funções, chamadas de funções elementares, tais como, a função afim, a função linear e a função quadrática, e suas respectivas aplicações. Interpretou a função módulo, a função polinomial, a função racional, a função exponencial, a função logaritma, a função composta, as funções crescentes e decrescentes e a função inversa.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

2) $f = g$

3) $f(x) + g(x) = x^3 + 4x + 8$,
$f(x) \cdot g(x) = (x^3 + 2x + 3).(2x + 5)$
e $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{2x + 5}$.

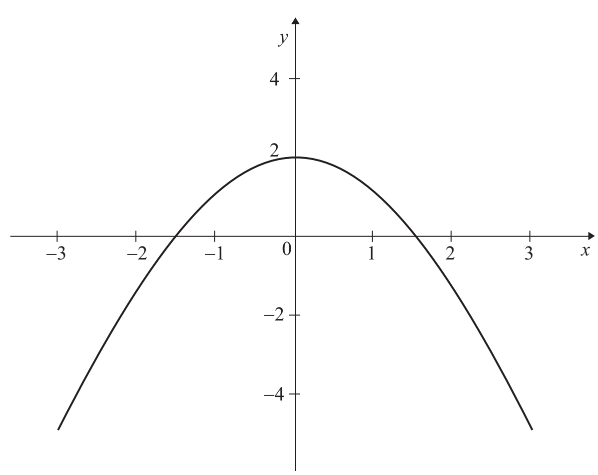
- **Exercícios propostos – 2**

1) a) -11; b) $4a + 1$; c) $4x + 4h - 3$;
d) $4x + 4h - 6$; e) 4.

2) a) 9; b) $-\dfrac{11}{16}$; c) $10x + 5h - 4$;
d) $\dfrac{-4x + 5}{x^2}$; e) $\dfrac{28}{5x^2 - 4x}$.

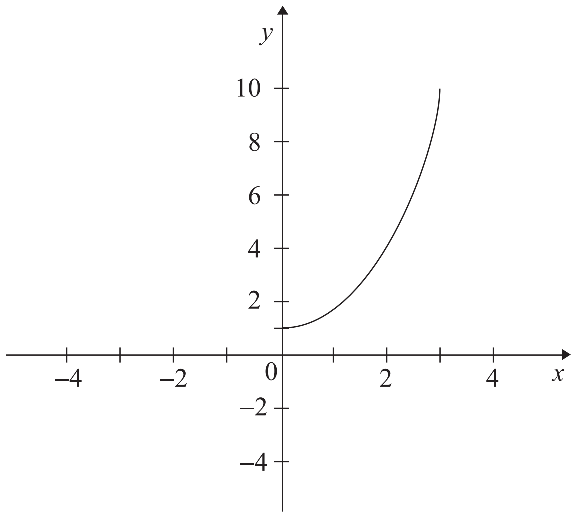
3) a) -6 b) 3; c) 6;
d) $-\dfrac{3}{2}$; e) $4x - |2x - 3|$.

4)



5) a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; b) $Dom(f) = (-\infty, 3]$;
c) $Dom(f) = [5, +\infty)$.

6)



7) a) $f \circ g = \dfrac{x+1}{1-x}$ e $Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$;

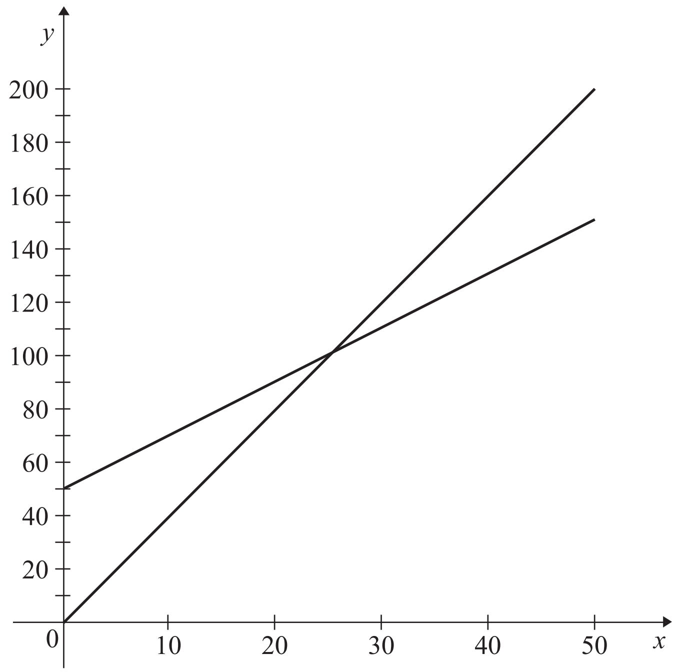
b) $g \circ f = \dfrac{x-1}{x+1}$ e $Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1\}$;

c) $f \circ f = x$ e $Dom(f \circ f) = \mathbb{R}$.

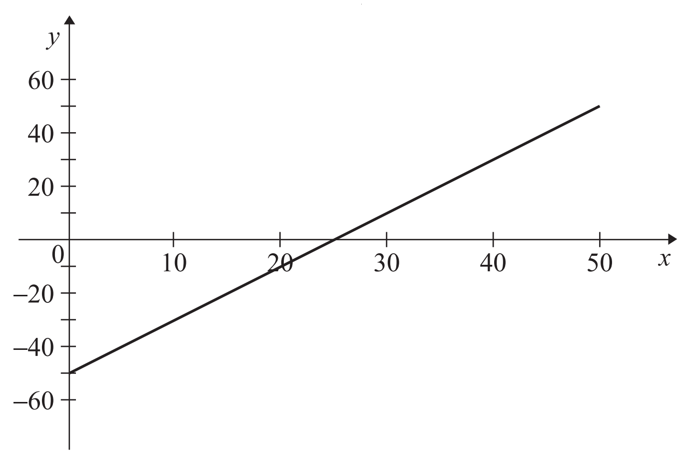
8) a) 360; b) 2.

9) a) $x = 5$. b) $x = \dfrac{19}{4}$.

10) Ponto de nivelamento é $x = 25$.



11) Lucro $L(x) = 2x - 50$.



Se $0 < x < 25$, então $R(x) < C(x)$ e, portanto $L(x) < 0$, ou seja, prejuízo.

Se $x > 25$, então $R(x) > C(x)$ e, portanto $L(x) > 0$, ou seja, lucro positivo.

12) Função receita: $R(x) = x \times \left(250 - x\right)$;

Função custo: $C(x) = 10 \times (250 - x)$.

a) Função lucro: $L(x) = (250 - x) \times (x - 10)$;

b) 5.375.

13) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$.

14) $(20 - 4x)^2$.

15) a) $5 + \dfrac{x}{16}$;

b) $4 + \dfrac{x}{20}$;

c) A medida que x aumenta o custo médio tende para 5(cinco).

UNIDADE

4

Seqüências, Limite e Continuidade

Seqüências, Limite e Continuidade

Objetivos

Nesta unidade você vai,escrever e calcular o limite de uma seqüência; interpretar a noção intuitiva de limite de uma função; calcular limite de uma função usando teoremas e também calcular limites laterais; e analisar a continuidade de uma função.

Seqüências, Limite e Continuidade

Seqüências

A partir deste momento, passaremos a estudar seqüência, limites e continuidade de uma função real. Leia com atenção, caso tenha dúvidas busque esclarece-las nas bibliografias indicadas e também junto ao Sistema de Acompanhamento

Uma seqüência é um conjunto de números $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, disposta numa certa ordem (isto é, em correspondência com os inteiros positivos) e formada segundo uma dada regra. Também podemos dizer que, uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

Cada número da seqüência chama-se termo; a_n é o -ésimo termo ou termo geral. Uma seqüência será finita ou infinita, conforme tenha ou não, um número finito de termos.

A seqüência $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ também é representada abreviadamente por $\left\{a_n\right\}$.

Exemplo 4.1 *Os números 2, 7, 12, 17, ..., 32, formam um seqüência fini-*

ta, cujo termo geral é $a_n = 5n - 3$, *para* $n = 1, 2, \ldots, 7$. *Ou ainda podemos representar por* $\left\{5n - 3\right\}$.

Exemplo 4.2 *Os números, formam uma seqüência infinita.*

Exemplo 4.3 *Os números* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ *ou* $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ *formam uma seqüência infinita.*

Exemplo 4.4 *Os números* $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \ldots$ *formam uma seqüência infinita.*

Exemplo 4.5 *Escreva os primeiros 5 termos da seguinte seqüência* $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$.

Resolução: Fazendo $n = 1$ em $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$ você tem $\frac{2 \times 1 - 1}{3 \times 1 + 2} = \frac{1}{5}$.

Do mesmo modo, fazendo $n = 2$ temos $\frac{2 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 2} = \frac{3}{8}$.

Para $n = 3$, vem $\frac{5}{11}$. Para $n = 4$, vem $\frac{7}{14}$. Para $n = 5$ vem $\frac{9}{17}$.

Portanto, os cinco primeiros termos da seqüência $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$ são os números

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{9}{17}.$$

Exemplo 4.6 *Escreva os primeiros 5 termos da seguinte seqüência* $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$.

Resolução: Fazendo $n = 1$ em $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ você tem $\frac{1-(-1)^1}{1^3} = \frac{2}{1^3}$.
E assim por diante.

Portanto, os cinco primeiros termos da seqüência $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ são os números

$$\frac{2}{1^3}, 0, \frac{2}{3^3}, 0, \frac{2}{5^3}.$$

Limite de uma seqüência

Informalmente, podemos dizer que uma seqüência tem limite L (converge para L), se a partir de um certo índice todos os termos da seqüência se aproximam cada vez mais de L. Ou, ainda dizemos que, uma seqüência $\{a_n\}$ tem o limite L, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $N > 0$, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ $\forall$ inteiro $n > N$ e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Intuitivamente, L é o limite de uma seqüência, quando os termos da mesma aproximam-se cada vez mais de L, quando $n \to \infty$.*

Exemplo 4.7 *Seja a seqüência* $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 4.8 *Seja a seqüência* $\left\{\dfrac{3}{n-1}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n-1} = 0$.

Exemplo 4.9 *Consideremos a seguinte seqüência* $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exemplo 4.10 *Seja a seqüência* $\left\{\dfrac{8n}{2n+3}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{2n+3} = 4$.

*Se uma seqüência $\{a_n\}$ tem um limite, dizemos que a seqüência é **convergente**, e dizemos que a_n converge para àquele limite. Se uma seqüência não for convergente, dizemos que é **divergente**.*

GLOSSÁRIO

Seqüência*: ou **Sucessão** é uma lista de elementos, ou seja, um conjunto ordenado de maneira que cada elemento fica naturalmente seqüenciado. Uma sucessão é uma função com domínio igual ao conjunto dos números inteiros positivos (ou, o que é o mesmo, o conjunto dos números naturais não-nulos).

Exemplo 4.11 *A seqüência* $\left\{\dfrac{4n^2}{2n^2+1}\right\}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{2n^2+1}=\dfrac{4}{2}=2$, *portanto é convergente e tem limite 2.*

Exemplo 4.12 *A seqüência* $\left\{(-1)^n+1\right\}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+1\right]=\begin{cases}0, & n \text{ é ímpar}\\ 2, & n \text{ é par}\end{cases}$, *portanto a seqüência é divergente.*

Exemplo 4.13 *A seqüência* $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$, *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$, *portanto é convergente e tem limite* $\dfrac{1}{2}$.

Exemplo 4.14. *A seqüência* $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$, *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}=\infty$ *(não existe o limite), portanto a seqüência é divergente.*

Seqüências monótonas crescentes e decrescentes

Definição 4.4 *Dizemos que uma seqüência* $\{a_n\}$ *é*

(i) crescente, se $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n$;

(ii) decrescente, se $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n$.

Se uma seqüência é crescente ou decrescente, ela é chamada **monótona**.

Exemplo 4.15 *A seqüência* $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{9},\ldots,\dfrac{n}{2n+1},\dfrac{n+1}{2n+3},\ldots$ *ou* $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$, *é crescente, pois*

$$\frac{n}{2n+1}\le\frac{n+1}{2n+3}.$$

De fato,

$$\frac{n}{2n+1}\le\frac{n+1}{2n+3}\Rightarrow n(2n+3)\le(n+1)(2n+1)$$
$$\Rightarrow 2n^2+3n\le 2n^2+3n+1,$$

o que vale sempre.

Exemplo 4.16 *A seqüência* $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\ldots,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\ldots$, *é decrescente, porque* $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$.

De fato, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 > n$, o que vale sempre.

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure, então, resolver os exercícios propostos.

Exercícios propostos – 1

1) a) Dada a seqüência $-1, -3, -5, -7, \ldots$ determine o termo geral a_n.

b) Dada a seqüência $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ determine o termo geral a_n.

2) Escreva os primeiros 5 termos das seguintes seqüências:

a) $\left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{2.4.6.\ldots.2n} \right\}$.

b) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \right\}$.

c) $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

3) Calcular o limite das seguintes seqüências:

a) $\left\{ \frac{2n^2+1}{3n^2-n} \right\}$.

b) $\left\{ \frac{3n^3+1}{2n^2+1} \right\}$.

4) Verificar se as seqüências abaixo são monótonas crescentes ou monótonas decrescentes.

a) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$.

b) $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

GLOSSÁRIO

Limite*: é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) vai crescendo, ou seja, tende para infinito.

Limites de funções

O conceito de Limite* é importante na construção de muitos outros conceitos no cálculo diferencial e integral, por exemplo, nas noções de derivada e de integral que serão abordados nas unidades 5 e 7, que são os suportes de toda a construção das variáveis físicas, além da importância no cálculo de área e volumes.

A noção de limite

A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir o comportamento de algumas funções que variam continuamente, e o comportamento de outras funções que podem variar, independente do modo como se controla as variáveis.

É com base nisso, que pretendemos apresentar a você, uma noção intuitiva de limite, para que você possa observar o que ocorre com a função $f(x)$, quando x tende para um número real a ou quando x tende para mais ou menos infinito. Usaremos limites, por exemplo, para definir retas tangentes e gráficos de funções. Essa aplicação geométrica nos leva ao importante conceito de *derivada de uma função,* que investigaremos, com detalhes, na unidade 5.

Dada uma função f, você quer saber o que ocorre com os valores $f(x)$, quando a variável x se aproxima de um ponto a. Para você entender isto melhor, considere a função f definida pela expressão abaixo:

$$f(x) = \frac{(3x+2)(x-1)}{(x-1)}.$$

A função f está definida para todo x real, exceto $x = 1$. Assim, se $x \neq 1$, o numerador e o denominador de f podem ser divididos por $(x-1)$, e você obtém

$$f(x) = 3\,x + 2,\quad \text{para}\quad x \neq 1.$$

Vamos estudar juntos os valores da função $f(x)$, quanto x estiver próximo de 1, mas não é igual a 1. Primeiro, vamos considerar valores de x cada vez mais próximos de 1, com $x < 1$ e observaremos o que está acontecendo com $f(x)$, conforme o quadro abaixo:

$x < 1$	0	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$f(x) = 3x + 2$	2	2,75	3,5	4,25	4,70	4,97	4,997	4,9997	4,99997

Agora, vamos considerar que a variável x aproxima-se cada vez mais de 1, com $x > 1$ e observar o que está acontecendo com $f(x)$:

$x > 1$	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,00001
$f(x) = 3x + 2$	8	7,25	6,5	5,75	5,30	5,03	5,003	5,00003

Observamos, em ambas os quadros, que enquanto x se aproxima cada vez mais de 1, a função $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Em outras palavras, é possível obter o valor de $f(x)$ tão próximo de 5 quando desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 1. Examine o gráfico de $f(x)$, a seguir:

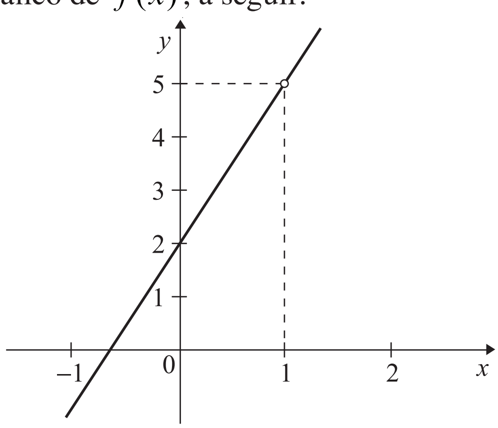


Figura 4.1

Para x cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ aproxima-se de 5 e escreve-se a seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(3\,x + 2) = 5.$$

Lê-se:

O limite da função $f(x)$, quando x aproxima-se de 1, é 5, ou ainda, o limite de $f(x)$, quando x tende a 1, é 5. Isto significa dizer que o valor da expressão $3x + 2$, cada vez mais aproxima-se de 5, à medida que os valores de x estão aproximando-se de 1. Quando $x \to 1$, $f(x) \to 5$.

Consideremos agora a função f, definida pela expressão $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$, para $x \neq 1$.

Queremos saber o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$ e o que ocorre com a função $f(x)$, quando x tende para 1, através de valores de $x < 1$. Vejamos o que acontece com $f(x)$, no quadro abaixo, quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$.

$x > 1$	3	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$	5	7	11	19	43	403	4003	40003	...

Observamos que, quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$ ou pela direita de 1, a função $f(x)$ cresce indefinidamente ou a função f tende para $+\infty$ e, pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela direita é $+\infty$, $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$ e anota-se por

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3\,x+1}{x-1} = +\infty.$$

Vejamos o que acontece com $f(x)$, no quadro abaixo, quando x tende para 1, através de valores de $x < 1$.

$x < 1$	-1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$	1	-1	-37	-397	-3997	-39997	...

Observamos que quando x tende a 1, através de valores de $x < 1$ ou pela esquerda de 1, os valores absolutos da função $f(x)$ crescem e são negativos ou a função f tende para $-\infty$, e pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda é $-\infty$, $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$, e anota-se por

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = -\infty .$$

Apresentaremos agora a definição formal de limite de uma função.

Seja I um intervalo qualquer, a $\in I$ *e* $f(x)$ *uma função definida no intervalo I, (exceto eventualmente em a). Diz-se que o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *é* L, *e escreve-se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *se para todo* ε *(epslon),* $\varepsilon > 0$, *existe um* δ *(delta),* $\delta > 0$, *tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \textit{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta .$$

Teoremas sobre limites de funções

A partir de agora você vai conhecer, sem demonstração, os teoremas sobre limites de funções e suas aplicações na resolução de problemas. Estes teoremas desempenharão um papel importante em todo o nosso curso.

Teorema 4.1 Unicidade do limite:

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$ então $L = M$.

Teorema 4.2 Se $f(x) = k$ para todo x real, então para qualquer número real a, tem-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k .$$

Exemplo 4.17 *Considere* $f(x) = 4$ *e* $a = 2$ *então* $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 4 = 4$. *Ou seja, o limite de uma constante é a própria constante.*

Teorema 4.3 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então,*

a) $\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$.

b) Para qualquer número real k, *tem-se*

$$\lim_{x\to a}\left(k \times f(x)\right) = k \times \lim_{x\to a} f(x) = k \times L.$$

c) $\lim_{x\to a}\left(f(x) \times g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L \times M$.

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *se* $M \neq 0$.

e) $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$.

Teorema 4.4 Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = L$, com $L = g(b)$, então

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Observação *Pelo Teorema 4.3(e) podemos concluir*

$$\lim_{x\to a} x^n = \left(\lim_{x\to a} x\right)^n = a^n.$$

Por exemplo,

$$\lim_{x\to 2} x^3 = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 = 2^3 = 8.$$

Teorema 4.5 Sejam $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então

a) $\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^L$.

b) $\lim_{x\to a}\left(\log_b f(x)\right) = \log_b\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \log_b L$, para $L > 0$.

c) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para todo n se $L \geq 0$ e só para n ímpar se $L < 0$

Observação *Seja* $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, *um polinômio qualquer, pelo teorema 4.3(a) e (b) e pela observação 4.1, temos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}\left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0\right)\\ &= \lim_{x\to a} b_n x^n + \lim_{x\to a} b_{n-1}x^{n-1} + \dots + \lim_{x\to a} b_1 x + \lim_{x\to a} b_0\\ &= b_n \lim_{x\to a} x^n + b_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \dots + b_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} b_0\\ &= p(a).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Por exemplo,

(i)

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^2 - 7x + 4\right) = 2\times 2^2 - 7\times 2 + 4 = 2\times 4 - 7\times 2 + 4 = 8 - 14 + 4 = 18.$$

(ii)

$$\lim_{x\to 1}\left(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2\right) = 1^5 - 3\times 1^4 + 2\times 1^3 + 2 = 1 - 3 + 2 + 2 = 2.$$

Vejamos agora alguns exemplos resolvidos.

Exemplo 4.18 *Calcular*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5}.$$

Resolução: Aplicando o Teorema 4.3(a), (b) e (d), obtemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5} = \frac{\lim_{x\to 1}\left(x^2 + 7x - 2\right)}{\lim_{x\to 1}\left(3x - 5\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 7x - \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} 3x - \lim_{x\to 1} 5}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 7\times \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} 3\times \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 5}$$

$$= \frac{1^2 + 7 \times 1 - 2}{3 \times 1 - 5} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5} = -3.$$

Exemplo 4.19 *Calcular*

$$\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \times (x+5) \right].$$

Resolução: Inicialmente você aplica o Teorema 4.3(c) o Teorema 4.3(e), vem

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \times (x+5) \right] &= \lim_{x \to 0} (x-1)^{10} \times \lim_{x \to 0} (x+5) \\ &= \left(\lim_{x \to 0} (x-1) \right)^{10} \times \lim_{x \to 0} (x+5) \\ &= (0-1)^{10} \times (0+5) = (-1)^{10} \times 5 = 1 \times 5 = 5.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \times (x+5) \right] = 5.$$

Vamos verificar agora se você compreendeu os teoremas sobre limites. Para uma melhor compreensão, resolva os exercícios a seguir. Caso tenha dúvidas procure auxílio junto ao Sistema de Acompnhamento.

Exercícios propostos – 2

- Calcular os seguintes limites:

1) $\lim\limits_{x \to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 2}$.

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3 - 10x^2 + 8x + 1}{x^2 - 5x - 6}$.

3) $\lim\limits_{x \to -1} 3^{(x^3 + 3x + 2)}$.

4) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x - 3}{6x + 5}$.

5 $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{2x}{-3x + 5}}$.

Os resultados desta seção serão importantes para toda a seqüência de nosso curso. Por isso, só passe para a próxima seção quando tiver resolvido os exercícios propostos acima. Se você ainda tem alguma dúvida, releia a seção e depois retorne aos exercícios. Este procedimento pode ser bastante útil.

Limites laterais

Na subseção anterior analisamos o comportamento de uma função $f(x)$, quando x se aproxima de um número real a e quando x assume valores (positivos ou negativos) de valor absoluto muito grande. O nosso objetivo agora é estudar os casos quando x tende para a pela direita, $x \to a$ e $x > a$ ou quando x tende para a pela esquerda, $x \to a$ e $x < a$ e com isto identificar a existência de limite de uma função através dos limites laterais, e esboçar o gráfico de uma função usando limites laterais. Para isto vejamos as seguintes definições.

Limite à esquerda

Se $f(x)$ tende para L_1 quando x tende para a através de valores menores que a diz-se que L_1 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda e indica-se por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 .$$

Limite à direita

Se $f(x)$ tende para L_2 quando x tende para a através de valores maiores que a diz-se que L_2 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita e indica-se por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 .$$

Vamos ver agora alguns exemplos, aplicando as definições acima.

Exemplo 4.20 *Seja a função f definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ x < 1 \\ 4, & se\ x = 1 \\ 4 - x, & se\ x > 1 \end{cases} .$$

Determinar:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ *;*

b) b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;

c) *Esboce o gráfico de* $f(x)$.

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, você responde a letra *a)*. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2 + 1 \quad se \quad x < 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\,.$$

Agora, pela definição de limite à direita você responde a letra *b)*. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 4 - x \ \ se \ \ x > 1$. Logo,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4 - x) = 4 - 1 = 3.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3.$$

c) Note que $f(1) = 4$. Com estas informações, de que $f(1) = 4$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, você consegue perceber como $f(x)$ se comporta quando x está próximo de 1. Para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x < 1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $x^2 + 1$; dê valores para $x > 1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $4 - x$ e veja o gráfico de $f(x)$, abaixo.

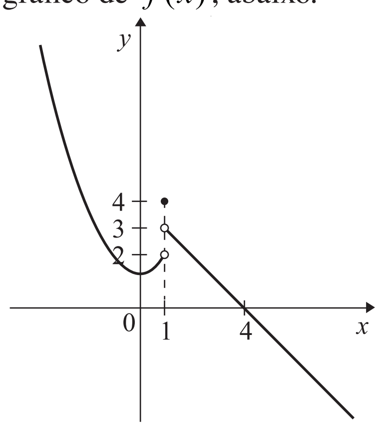


Figura 4.2

Exemplo 4.21 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \ \ x \le -2 \\ 2x + 7, & se \ \ x > -2 \end{cases}.$$

Determine:

a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ *;*

b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ *;*

c) Esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, vamos resolver letra *a*). Observe como está definida a função acima para valores de x à esquerda de -2, ou seja, para $x \le -2$.
Assim,

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{se} \quad x \le -2$$

e

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Logo,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 3.$$

Pela definição de limite à direita, vamos resolver a letra *b*). Para valores de x à direita de -2, a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 2x + 7 \quad \text{se} \quad x > -2$ e

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (2\,x + 7) = 2 \times (-2) + 7 = 3.$$

Logo,

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3.$$

c) Note que $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Como $f(-2) = 3$ e $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$, para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x \le -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes, através da expressão $x^2 - 1$, dê valores para $x > -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes, através da expressão $2x + 7$ e veja o gráfico de $f(x)$, abaixo:

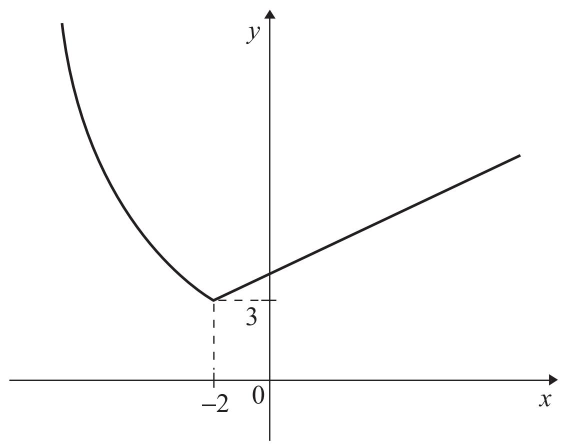


Figura 4.3

Teorema de existência do limite

Sejam I um intervalo aberto, a um ponto deste intervalo e $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$. Então existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L .$$

Vejamos agora, alguns exemplos de aplicação do teorema de existência do limite.

Exemplo 4.22 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \\ x + 3, & \text{se } x > 2 \end{cases} .$$

Determine o $\lim_{x \to 2} f(x)$ *, se existir, e esboçe o gráfico de* $f(x)$.

Resolução: Para determinar o $\lim_{x \to 2} f(x)$, vamos calcular os limites laterais de $f(x)$, ou seja, calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. Para calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, observe na função dada que $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2 + 1$ para valores de x menores que 2.

Assim,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2+1) = 2^2+1 = 5.$$

Para calcular $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, observe na função dada que $f(x)$ está definida por $f(x) = x+3$ para valores de x maiores que 2.

Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+3) = 2 + 3 = 5.$$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$, pelo teorema acima temos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

Para esboçar o gráfico da função $f(x)$ você utiliza o mesmo procedimento do exemplo anterior, conforme vemos abaixo:

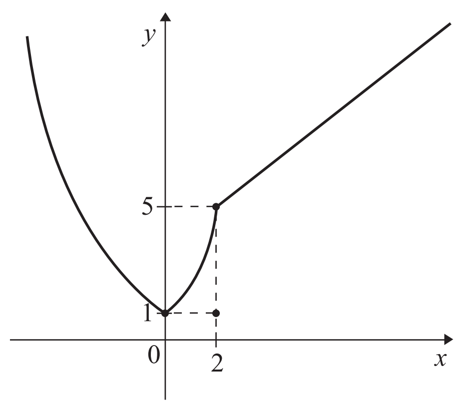


Figura 4.4

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui? E para isto tente resolver os exercícios propostos a seguir. Caso tenha dúvidas busque esclarece-las antes de seguir adiante.

Exercícios propostos – 3

1) Seja $f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 1, & \text{se } x < 2 \end{cases}$.

Calcular: $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

2) Seja $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x + 5}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Calcular: $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 0} f(x)$.

3) Seja $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x^3 + 1}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Calcular: $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

4) Seja $f(x)$ uma função definida para todo número real por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{se } x \leq -2 \\ 4 - k, & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Determinar o valor da constante k para que exista $\lim_{x \to -2} f(x)$.

5) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{se } x > 4 \\ 4 - x, & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$

Calcular: $\lim_{x \to 4^-} f(x)$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Da noção de limite lateral, dependerá, fundamentalmente, o entendimento de continuidade de uma função, que será estudada posteriormente.

Os exercícios desta seção têm por objetivo contribuir para o amadurecimento do conceito da existência do limite de uma função. Para isto, é importante que você tenha resolvido a maioria deles. Se você sentiu alguma dificuldade, reveja os exemplos, pois eles lhe darão os subsídios necessários para a resolução dos problemas propostos.

Indeterminações

Na subseção anterior, você estudou Limites Laterais. Nesta seção, vamos entender melhor o que vem a ser Indeterminação. Nosso objetivo aqui é "levantar" uma indeterminação que é uma expressão sem sentido que se obtém ao tentar calcular um limite. Por exemplo, usando erroneamente a letra d) do Teorema 4.3 para calcular $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se chega à expressão $\frac{0}{0}$ que não possui significado. Neste processo utilizaremos alguns artifícios algébricos.

Até agora calculamos limites do quociente entre duas funções, aplicando o Teorema 4.3 letra d). Veja o exemplo 4.18 resolvido ($\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5} = -3$). Utilizando este teorema, você notou que não houve nenhuma dificuldade para encontrar o valor do referido limite, mas podem ocorrer situações em que você usando erroneamente a letra d) do Teorema 4.3, encontre $\frac{0}{0}$. Cuidado quando isto ocorrer. O limite nunca é $\frac{0}{0}$, pois $\frac{0}{0}$ não é número algum. Neste caso, o que fazer? É o que veremos a seguir:

Consideremos $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Em princípio, nada se pode afirmar sobre o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \frac{0}{0}$ (com a aplicação indevida do Teorema 4.3 letra d).

Dependendo das funções f e g, o limite pode assumir qualquer valor real ou não existir.

Diz-se que $\frac{0}{0}$ *é uma indeterminação, ou um símbolo de indeterminação.*

Para um melhor entendimento, vejamos os exemplos abaixo.

Exemplo 4.23 *Sejam* $f(x) = x^4$ *e* $g(x) = x^3$. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Resolução: Tem-se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^4 = 0^4 = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^3 = 0^3 = 0$$

Mas,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \to 0} x = 0 .$$

Exemplo 4.24 *Sejam* $f(x) = x^3$ *e* $g(x) = 4x^3$. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Resolução: Você tem

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 = 0^3 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} 4x^3 = 4 \times 0^3 = 0.$$

Neste caso,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{4\,x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 4.25 *Calcular* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$.

Resolução: Quando $x = 1$ temos a determinação $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Neste caso,

$$\frac{x-1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-3} = -2$$

Tentando calcular limites de funções aplicando os teoremas vistos, você pode chegar a outras expressões, cujo significado ou valor, não é determinado. Ao todo são sete tipos de indeterminações:

Os tipos de indeterminações:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty \text{ e } \infty^0.$$

Sempre que no cálculo de um limite você chegar a um destes símbolos, deve buscar alguma alternativa para obter o valor do limite usando artifícios algébricos. A este trabalho dá-se o nome de levantamento de uma indeterminação. Este processo também pode ser resolvido no capítulo Aplicações de Derivada usando ***regra de L'Hospital****, que também trata de limites funções com indeterminações. Recomendamos a você uma releitura da seção 6.3, que trata dos limites.*

Limites infinitos

Consideremos a função definida por $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$, para $x \neq 3$. Queremos determinar os valores da função $f(x)$ quando x está próximo de 3. Para x se aproximando de 3 pela direita, $x > 3$, temos os valores de $f(x)$, dados no quadro abaixo:

$x, x > 3$	4	3,5	3,25	3,125	3,1	3,01	3,001	...
$f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	128	200	20.000	2.000.000	...

Observamos que, fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x > 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente, isto é, pode-se tornar $f(x)$ tão grande quanto você desejar, desde que se tome x bem próximo de 3.

Escreve-se

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty,$$

ou seja, quando $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$.

Agora vamos considerar x, aproximando-se de 3 pela esquerda. Para $x < 3$ obtêm-se os valores de $f(x)$, dados no quadro abaixo.

$x,\ x < 3$	2	2,5	2,75	2,8	2,9	2,99	2,999	...
$f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	50	2.000	20.000	2.000.000	...

Observamos que fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x < 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente, isto é, pode-se tornar $f(x)$ tão grande quanto você desejar, desde que se torne x bem próximo de 3.

Escreve-se

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty\,,$$

ou seja, quando $x \to 3^-$, $f(x) \to +\infty$.

Portanto, quando x se aproxima de 3 pela direita ($x > 3$) ou pela esquerda ($x < 3$), $f(x)$, cresce ilimitadamente, e escreve-se

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty\,.$$

Escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende para a.

Se $f(x) < 0$ para x próximo de a e o módulo de $f(x)$ crescer ilimitadamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

De maneira análoga, atribuímos significados para $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente sempre que x crescer ilimitadamente.

De maneira análoga, atribuímos significado para $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Limite de Função Racional

Este teorema vai nos facilitar o cálculo de limite de uma função racional quando a variável x tende para mais infinito ou tende para menos infinito. Vejamos o seu enunciado.

Teorema 4.7 Seja a função racional (o quociente entre dois polinômios)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_o\ x^n + a_1\ x^{n-1} + a_2\ x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_o\ x^m + b_1\ x^{m-1} + b_2\ x^{m-2} + \ldots + b_m}$$

com $a_o \neq 0$ e $b_o \neq 0$.

Então,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_o \times x^n}{b_o \times x^m},$$

ou seja, o limite da função racional $f(x)$ é dado pelo limite da razão ou o quociente dos termos de maior grau dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.

Vejamos alguns exemplos, aplicando o Teorema de uma função racional quando $x \to \pm\infty$.

Exemplo 4.26 *Determinar*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

Resolução: Pelo Teorema acima, tem-se

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3\ x^3}{5\ x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.\ (\text{Aqui } n = m = 3).$$

Portanto,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3} = \frac{3}{5}.$$

Exercícios propostos – 4

- Calcular os seguintes limites:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x^2 + 1}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x + 1}$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 7}{6x^5 + 2x^4 - x^3 + 2}$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 2x^3 + 4)$.

5) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-2x}{4 - x^2}$.

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^6 - 2x^5 + 7x^3 + 2}{x^5 - 2x^3 + 4}$.

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1}{6x^5 + 2x^3 - 2}$.

Nos exercícios desta seção e da anterior, você teve a oportunidade de perceber se entendeu a aplicação dos teoremas nelas enunciados. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos, de ambas as seções, porque istocontribuirá para um melhor entendimento dos conteúdos nelas apresentados. Se tiver dúvidas, consulte o Sistema de Acompanhamento.

Funções contínuas

Nesta seção, vamos ver que uma das conseqüências importantes da noção de limite é a noção de continuidade de uma função.

Na linguagem quotidiana dizemos que o tempo é contínuo, uma vez que ele decorre de maneira ininterrupta. O relógio não salta, digamos, de 2 horas para 2 horas e 1 minuto, deixando um lapso de 1 minuto.

Em matemática usamos a expressão contínua em um sentido semelhante. Intuitivamente gostaríamos de afirmar que uma função f é contínua em $x = a$, quando o gráfico de f não tem interrupção em a, ou seja, o gráfico de f não tem quebras ou saltos em a. Para muitas funções contínuas isto é verdadeiro, mas existem exceções.

As considerações acima motivam as definições a seguir.

Seja f uma função definida em um conjunto X constituído de uma reunião de intervalos e seja $a \in X$. Diz-se que a função f é contínua no ponto a quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

A maior parte das funções elementares, vistas no capítulo 2, são contínuas em todo x real, por exemplo, $f(x) = c$, $f(x) = ax + b$, $f(x) = \text{sen}\, x$ e $f(x) = \cos x$.

Seja $a \in \text{Dom}\, f$ diz-se que uma função f é descontínua no ponto $x = a$ se f não for contínua em $x = a$.

Isto significa que f é descontínua em $x = a$, se ocorrer ao menos uma das seguintes condições:

i) Não existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

ii) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$, mas $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 4.27 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \le 3 \\ 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x - 1) = 3 - 1 = 2$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 4 = 4$, logo

não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Observe que $f(3) = 3 - 1 = 2$, mas isto não é suficiente para a continuidade de $f(x)$. Seria necessário que se tivesse $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ o que jamais poderia ocorrer, visto que não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$. Veja o gráfico de $f(x)$ abaixo.

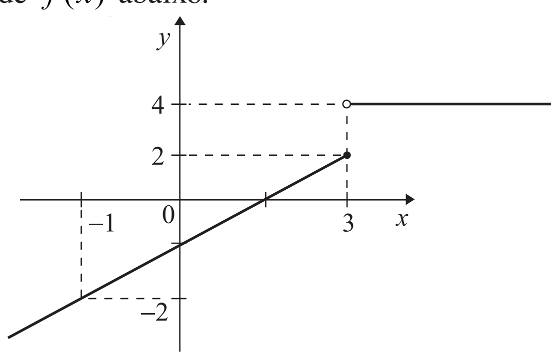


Figura 4.5

Uma função f é contínua no conjunto X se f é contínua em todos os pontos de X.

Por exemplo, as funções $f(x) = \text{tg}\, x$ e $g(x) = \text{sen}\, x$ são contínuas nos intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente.

Vamos estudar agora, os teoremas elementares de funções contínuas, tais como: soma, produto, quociente e composição.

Teorema 4.11 *Se as funções* $f(x)$ e $g(x)$ *são contínuas em* $x = a$, *então:*

a) A soma, $f(x) + g(x)$, *é contínua em* $x = a$ *;*
b) A diferença, $f(x) - g(x)$ *é contínua em* $x = a$ *;*
c) O produto, $f(x) \times g(x)$, *é uma função contínua em* $x = a$ *;*
d) O quociente, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *é uma função contínua* $x = a$, *desde que se tenha* $g(a) \neq 0$.

Teorema 4.12 *A composição,* $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ *é contínua em* $x = a$, *desde que* $g(x)$ *seja contínua em* $x = a$ *e* $f(x)$ *seja contínua em* $g(a)$.

Observação 4.3
(i) A função polinomial $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *é contínua em* $\big(-\infty, +\infty\big) = \mathbb{R}$.
(ii) Uma função racional é contínua em todo número real de seu domínio.
(iii) As funções abaixo são contínuas em todo número real x *de seu domínio:*

$$f(x) = a^x,\ g(x) = \log_a x,\ h(x) = \sqrt{x}.$$

Vejamos alguns exemplos de funções contínuas pelo Teorema 4.11 e 4.12.

Exemplo 4.28 *As funções* $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $(f + g)(x) = x^2 + 3x$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo 4.29 *As funções* $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \cos x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $(f \times g)(x) = (x+1) \times \cos x$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo 4.30 *As funções* $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo 4.31 *A função* $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3\,x^2 - 1$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo 4.32 *As funções* $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo* $\left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(2\,x\right) = 4x + 1$, *isto é,* $\left(f \circ g\right)(x) = 4x + 1$ *é contínua para todo número real* x.

Vamos analisar a continuidade de uma função num determinado ponto, $x = a$, e para isto consideraremos os seguintes exemplos resolvidos:

Exercícios propostos – 5

1) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se \;\; x > 2 \\ 5, & se \;\; x = 2 \\ 7x - 9, & se \;\; x < 2 \end{cases}$

Verificar se $f(x)$ é contínua em $x = 2$.

2) Verificar se a função f definida por

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x^2 - x, & se \;\; x < -3 \\ x^3 + 2, & se \;\; x > -3 \\ 4, & se \;\; x = -3 \end{cases}$$

é contínua no ponto $x = -3$.

3) Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & se \quad x<3 \\ 5, & se \quad x=3 \\ 8-x, & se \quad x>3 \end{cases}$

Verifique se $f(x)$ é contínua em $x = 3$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados neste caítulo, consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Harba, 1994. Vol. 1.
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/superior.htm

RESUMO

Nesta Unidade, você teve a oportunidade de estudar e compreender a definição de limite de uma forma intuitiva, bem como calcular limite de uma função, usando os teoremas sobre limites, o significado dos limites laterais, limites no infinito e limites infinitos. Percebeu também como levantar uma indeterminação e aprendeu a analisar a continuidade de uma função, aplicando limites laterais. Entendeu tudo até aqui? Não esqueça que a compreensão é fundmaental para que você possa acompanhar a disciplina. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos, já que o que veremos a seguir depende dos conceitos abordados neste capítulo. Consulte o Sistema de Acompanhamento, sempre que achar necessário.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) $\left\{-\left(2n-1\right)\right\}$; b) $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$.

2) a) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2.4}, \frac{1}{2.4.6}, \frac{-1}{2.4.6.8}, \frac{1}{2.4.6.8.10}$.

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^1, \left(\frac{7}{6}\right)^2, \left(\frac{10}{9}\right)^3, \left(\frac{13}{12}\right)^4, \left(\frac{21}{20}\right)^5$.

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

3) a) $\frac{2}{3}$; b) ∞ (não existe o limite).

4) a) monótona crescente; b) monótona crescente

- **Exercícios propostos – 2**

1) $\frac{2}{25}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) 1.

- **Exercícios propostos – 3**

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 12$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe.

2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\sqrt{5}$. Não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

4) $k = -8$.

5) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) $\frac{1}{2}$; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $+\infty$.

5) $-\infty$. 6) $-\infty$. 7) 0.

- **Exercícios propostos – 5**

1) Sim, $f(x)$ é contínua em $x = 2$.
2) A função dada não é contínua em $x = -3$.
3) A função $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.

UNIDADE

5

Derivadas

Objetivo

Nesta unidade você vai interpretar a taxa média de variação; escrever a definição de derivada e interpretar o seu significado geométrico; calcular e aplicar algumas regras de derivadas, tais como, a regra da cadeia; enunciar e calcular a derivada de função inversa; calcular derivadas sucessivas de uma função; e aplicar o conceito de diferencial em funções marginais.

Derivadas

Incremento e taxa média de variação

A partir de agora, veremos um dos conceitos mais importantes do calculo diferencial: a derivada de uma função.

Consideremos uma função f, dada por $y = f(x)$. Quando x varia de um valor inicial de x para um valor final de x, temos o incremento em x. O símbolo matemático para a variação em x, chamada incremento em x, será Δx (leia-se delta x). Logo,

$$\Delta x = \text{valor final de } x - \text{valor inicial de } x.$$

Por exemplo, quando x passa de um valor inicial 2 para um valor final 2,5, o incremento em x será $\Delta x = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$.

O incremento em y, Δy (leia-se delta y), será

$$\Delta y = \text{valor final de } y - \text{valor inicial de } y.$$

Por exemplo, quando y passa de um valor inicial 5 para um valor final 7,25, o incremento em y será $\Delta y = 7{,}25 - 5 = 2{,}25$.

Consideremos agora a função $y = f(x) = x^2 + 1$. Vamos calcular Δx quando x varia do valor $x = 1$ para $x = 3$ e também calcular Δy. Inicialmente temos $\Delta x = 3 - 1 = 2$. Para calcularmos o valor de Δy, temos

- para $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ e
- para $x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

Assim, $\Delta y = 5 - 2 = 3$. Portanto, $\Delta x = 2$ e $\Delta y = 3$.

De um modo geral, temos

Valor inicial de $x = x_0$ e valor final de $x = x_0 + \Delta x$;

Valor inicial de $y = f(x_0)$ e valor final de $y = f\left(x_0 + \Delta x\right)$. Assim,

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0).$$

Para a função $y = f(x) = x^2 + 1$, temos

$$\begin{aligned}\Delta y &= f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)\\ &= \left(x_0 + \Delta x\right)^2 + 1 - \left(x_0^2 + 1\right)\\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 + 1 - x_0^2 - 1\\ &= 2x_0\Delta x + \left(\Delta x\right)^2\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta y = 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2.$$

O que acabamos de mencionar, (conceito de incremento), nos motiva a seguinte definição.

Seja $f(x)$ uma função definição em um intervalo $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ com $x \neq x_0$. Quando a variável x passa para o valor $x = x_0$ para o valor $x = x_0 + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx, $\Delta x = x - x_0$, o correspondente valor da função passa de $f(x_0)$ para o valor $f\left(x_0 + \Delta x\right)$ sofrendo, portanto, uma variação $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$

Conforme mostra a figura 5.1 abaixo

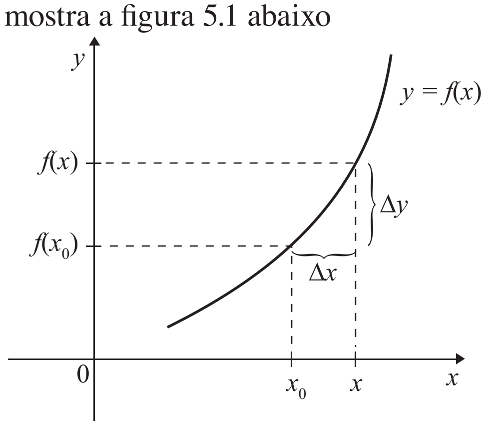


Figura 5.1

Vale destacar:

O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x},$$

recebe o nome de taxa média de variação da função $f(x)$ *quando* x *passa do valor* x_0 *para o valor* $x = x_0 + \Delta x$ *e expressa a variação média sofrida pelos valores da função* $f(x)$ *entre estes dois pontos.*

Exemplo 5.1 *Seja a função* f, *tal que* $f(x) = 2x + 1$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Determine a taxa média de variação de* f, *quando* x *passa de* $x_0 = 1$ *para* $x_0 + \Delta x = 4$.

Resolução: Como $x_0 + \Delta x = 4$ temos $1 + \Delta x = 4 \Rightarrow \Delta x = 4 - 1 = 3$;

$f(x_0) = f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$ e $f(x_0 + \Delta x) = f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9$.

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{9 - 3}{3} = \frac{6}{2} = 3.$$

Exemplo 5.2 *Seja a função* f *tal que* $f(x) = x^2 + 4$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Determine a taxa média de variação de* f, *quando* x *passa de* $x_0 = 2$ *para* $x_0 + \Delta x = 5$.

Resolução: Como $x_0 + \Delta x = 5$ temos $2 + \Delta x = 5 \Rightarrow \Delta x = 5 - 2 = 3$;

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8 \text{ e}$$
$$f(x_0 + \Delta x) = f(5) = 5^2 + 4 = 25 + 4 = 29.$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{29 - 8}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

Exemplo 5.3 *A função custo total para produzir* x *unidades de uma mercadoria,* $C(x)$*, em reais, é dada pela equação* $C(x) = 2x^2 - 0{,}5x + 10$. *Determinar a taxa média de variação do custo total em relação a* x*, quando* x *varia de* x_0 *unidades para* $x_0 + \Delta x$ *unidades.*

Resolução: Sabemos pela definição 5.1 que a taxa média de variação do custo total é dada por

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\left(x_0 + \Delta x\right) - C(x_0)}{\Delta x}.$$

Assim,

$$C(x_0 + \Delta x) = 2\left(x_0 + \Delta x\right)^2 - 0{,}5\left(x_0 + \Delta x\right) + 10$$

$$= 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - (0{,}5)x_0 - (0{,}5)\Delta x + 10$$

e

$$C(x_0) = 2x_0^2 - 0{,}5x_0 + 10$$

Logo,

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\left(x_0 + \Delta x\right) - C(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - (0{,}5)x_0 - (0{,}5)\Delta x + 10 - \left(2x_0^2 - (0{,}5)x_0 + 10\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - (0{,}5)x_0 - (0{,}5)\Delta x + 10 - 2x_0^2 + (0{,}5)x_0 - 10}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - (0{,}5)x_0 - (0{,}5)\Delta x + 10 - 2x_0^2 + (0{,}5)x_0 - 10}{\Delta x}$$

$$= \frac{4x_0\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - (0{,}5)\Delta x}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x - 0{,}5.$$

Portanto, a taxa média de variação da função custo total $C(x) = 2x^2 - 0{,}5x + 10$, quando x varia de x_0 unidades para $x_0 + \Delta x$ unidades é $\frac{\Delta C}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x - 0{,}5$.

Exercícios propostos – 1

1) Determinar a taxa média de variação das funções seguintes entre os pontos indicados:

a) $f(x) = 3$; 2 e 4

b) $f(x) = x^2 + x$; -2 e 2

c) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$; 3 e 6

d) $f(x) = -x^2$; -4 e -1

e) $f(x) = -x + 1$; -2 e 6

2) Determinar a taxa média de variação da função $f(x) = \sqrt{x+1}$ entre os pontos x_0 e $x_0 + \Delta x$.

3) Uma fábrica de doces verificou que o custo total diário, para produzir x caixas de doces cristalizados, em reais, era dado por $C(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 2$. Determinar a taxa média de variação do custo em relação a x.

Definição de derivada

Na seção anterior, compreendemos o significado de taxa média de variação de uma função $f(x)$, quando x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$. Isto nos leva a seguinte definição.

Derivada da função. *A derivada de uma função* f *em relação à variável* x *do domínio de* f *é a função* $f'(x)$, *dada por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir. Diz-se, nesse caso, que a função $f(x)$ *é derivável em* x.

Derivada de uma função no ponto x_0**.** *Se* x_0 *for um número particular no domínio de* f, *então a derivada da função* f *no ponto* x_0, *denotada por* $f'(x_0)$, *é dada por*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir. Diz-se, nesse caso, que a função $f(x)$ *é derivável em* x_0, *ou seja, existe* $f'(x_0)$.

Há várias maneiras de representar a derivada, por exemplo,

$$f'(x_0),\ Df(x_0),\ y'(x_0),\ \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0},\ f'(x),\ y',\ \frac{df}{dx},\ \frac{dy}{dx}, \text{etc.}$$

Exemplo 5.4 *Dada* $f(x) = 4x^2 + 8$, *calcular a derivada de* f.

Resolução: Se x é algum número no domínio de f, então pela definição 5.2 vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[4(x+\Delta x)^2 + 8\right] - \left(4x^2 + 8\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) + 8 - 4x^2 - 8}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 4x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(8x + 4\Delta x\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

Portanto, a derivada de $f(x) = 4x^2 + 8$, em relação a x, é $8x$, ou seja, $f'(x) = 8x$.

Exemplo 5.5 *Dada* $f(x) = 5x^2 + 3$, *encontrar a derivada de* f *no ponto* $x_0 = 2$, *ou seja,* $f'(2)$.

Resolução: Pela definição 5.3, vem

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(2 + \Delta x\right) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[5\left(2 + \Delta x\right)^2 + 3\right] - \left(5 \cdot 2^2 + 3\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\left(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) + 3 - 23}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 + 20 \cdot \Delta x + 5 \cdot (\Delta x)^2 - 20}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 \cdot \Delta x + 5 \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(20 + 5 \cdot \Delta x\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(20 + 5 \cdot \Delta x\right) = 20$$

Portanto,

$$f'(2) = 20.$$

Exemplo 5.6 *Dada* $y = \dfrac{3 - x}{2 + x}$, *encontre* $\dfrac{dy}{dx}$.

Resolução: Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{3-x-\Delta x}{2+x+\Delta x} - \dfrac{3-x}{2+x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(2+x)\cdot(3-x-\Delta x)-(2+x+\Delta x)\cdot(3-x)}{(2+x+\Delta x)\cdot(2+x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6+x-x^2-2\cdot\Delta x - x\cdot\Delta x)-(6+x+3\cdot\Delta x - x^2 - x\cdot\Delta x)}{\Delta x\cdot(2+x+\Delta x)\cdot(2+x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6+x-x^2-2\cdot\Delta x - x\cdot\Delta x - 6 - x - 3\cdot\Delta x + x^2 + x\cdot\Delta x}{\Delta x\cdot(2+x+\Delta x)\cdot(2+x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-5\cdot\Delta x}{\Delta x\cdot(2+x+\Delta x)\cdot(2+x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-5}{(2+x+\Delta x)\cdot(2+x)} = \frac{-5}{(2+x)^2}.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{(2+x)^2}.$$

Exemplo 5.7 *Dada* $y = \dfrac{3-x}{2+x}$ *, encontre* $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x_0=-1}$ *, ou seja, encontre* $f'(-1)$.

Resolução: Do exemplo acima, temos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-5}{(2+x)^2}$, logo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0=-1} = \frac{-5}{(2+(-1))^2} = \frac{-5}{1^2} = -5.$$

Portanto,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0=-1} = -5,$$

ou seja,

$$f'(-1) = -5.$$

Exemplo 5.8 *Calcular $f'(x)$, onde $f(x) = x^2 - 3x$.*

Resolução: Pela definição 5.2, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Substituindo os valores, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 3) = 2x - 3. \end{aligned}$$

Portanto, se $f(x) = x^2 - 3x$, então $f'(x) = 2x - 3$.

Observação

(i) Se não existe o limite ou se é igual a $\pm\infty$, dizemos que a função não é derivável no ponto x_0, isto é, $\nexists\ f'(x_0)$.

(ii) Se existe apenas $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

dizemos que a derivada é lateral, e indicaremos por

a) $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$ *- derivada à direita de x_0.*

b) $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$ *- derivada à esquerda de x_0.*

c) Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, dizemos que a função é derivável no ponto x_0, isto é, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.

(iii) Se existem as derivadas laterais, porém $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, então dizemos que não existe $f'(x_0)$, ou seja, derivada da uma função no ponto existe se, e somente se, as derivadas laterais são iguais.

(iv) Uma função é derivável num intervalo $[a,b]$, se existem derivadas em qualquer ponto do intervalo $[a,b]$.

Exemplo 5.9 Calcular $f'(x)$ no ponto $x_0 = 0$ da função $f(x) = |x|$, ou seja, $f'(0)$.

Resolução: Por definição, temos

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f(0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\Delta x\right) - f(0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

Agora, pela definição de módulo ou valor absoluto de um número real a

$$
|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{se} \quad a < 0 \end{cases},
$$

vem

$$
f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1
$$

e

$$
f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.
$$

Portanto, pela terceira observação acima, $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$, não existe a derivada de $f(x) = |x|$ no ponto $x_0 = 0$.

Interpretação geométrica da derivada

A derivada de uma função num dado ponto, quando existe, tem um significado geométrico importante, que será discutido nesta seção.

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua em $[a,b]$. Seja G o gráfico da função $f(x)$. Seja $x \in [a,b]$ e $x_0 \in [a,b)$, $x \neq x_0$. Veja a figura 5.2 abaixo:

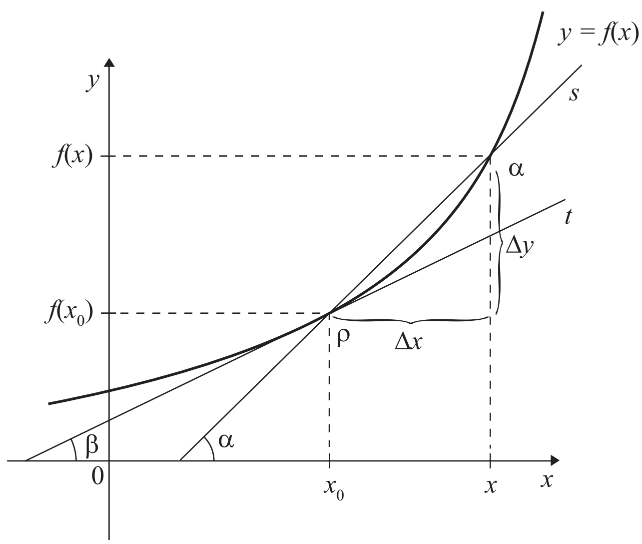


Figura 5.2

A reta s é determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ é uma secante à curva G e o se o coeficiente angular α é

$$tg\ \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f é derivável no ponto x, quando $x \to x_0$, $Q \to P$ e $s \to t$, onde t é tangente geométrica à curva G no ponto P, isto é,

$$tg\ \beta = f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Assim...

Podemos dizer que a derivada de uma função $f(x)$ quando existe, assume em cada ponto x_0, um valor que é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto de abscissa x_0.

Observação *A equação de uma reta não vertical passando em um ponto (x_0, y_0), é dada por*

$$y - y_0 = a(x - x_0),$$

onde a é o coeficiente angular da reta. Se $f(x)$ é uma função derivável em $x = x_0$ segue da interpretação geométrica da derivada que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto $\left(x_0, f(x_0)\right)$, tem coeficiente angular $a = f'(x_0)$. Portanto, a equação da reta tangente é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 5.10 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto (2,4).*

Resolução: Vamos determinar o coeficiente angular da reta que é $f'(2)$, temos

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(2+\Delta x\right) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2+\Delta x\right)^2 - 2^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2^2 + 4\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(4+\Delta x\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(4+\Delta x\right) = 4 \end{aligned}$$

Assim,

$$f'(2) = 4.$$

A equação da reta tangente é:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

ou seja,

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2).$$

Logo,

$$y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 8 + 4 = 4x - 4.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (2,4) é $y = 4x - 4$.

Se uma função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 de seu domínio, então $f(x)$ é contínua em x_0, isto é, se existe $f'(x)$, então $\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0)$.

A recíproca não é verdadeira, ou seja, se $f(x)$ é contínua em x_0, então não é necessário que $f'(x_0)$ exista. Por exemplo, $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x = 0$, mas $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Vimos que $f'_{-}(0) = -1$ e $f'_{+}(0) = 1$.

Cálculo das derivadas

O cálculo da derivada de uma função pela definição, dependendo da função, pode ser bastante complicado. Contudo, com base na definição de derivada da função, é possível obter várias regras que facilitam muito o trabalho. São as chamadas regras de derivação para soma, produto e quociente de funções. Elas são importantes no cálculo de derivadas de qualquer função.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de cálculo de derivada, usando a definição de derivada da função. Posteriormente, estes exemplos vão ser utilizados como regras de derivação.

- **Derivada da função constante**

Se $f(x) = k$, onde k é uma constante, então $f'(x) = 0$.

De fato,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x} = 0.$$

Logo, se $f(x) = k$, então $f'(x) = 0$.

Por exemplo, se $f(x) = 4$, então $f'(x) = 0$.

- **Derivada da função afim**

Se $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes e $a \neq 0$, então $f'(x) = a$.

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x} = a. \end{aligned}$$

Logo, se $f(x) = ax + b$, então $f'(x) = a$.

Por exemplo:

(i) Se $f(x) = 5x + 4$, então $f'(x) = 5$;

(ii) Se $f(x) = 2 - 6x$, então $f'(x) = -6$.

- **Derivada da função potência**

Se $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Por exemplo:

(i) Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$;

(ii) Se $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$.

Observação *Podemos estender a potência* $n \in \mathbb{N}$, *para qualquer* n *que seja inteiro ou racional. Por exemplo, se* $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, *então* $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$, *aqui* $n = \frac{3}{4}$.

- **Derivada da função soma**

Sejam $g(x)$ e $h(x)$ duas funções deriváveis no ponto x, então $f(x) = g(x) + h(x)$ também é derivável no ponto x e

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Logo, se $f(x) = g(x) + h(x)$, então

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Observação *Podemos estender a propriedade dada acima para a soma de* n *funções, isto é, se*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

então,

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Por exemplo, se $f(x) = x^4 + 3x^2 + x$, *então* $f'(x) = 4x^3 + 6x + 1$.

- **Derivada da função produto**

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções deriváveis em x, então $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ também é derivável em x, e

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x).$$

Logo, se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, então

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x).$$

Para simplificar a notação, às vezes escrevemos simplesmente,

$$f' = u \cdot v' + v \cdot u'.$$

Observação Podemos estender a propriedade dada acima para o produto de n funções, ou seja, se

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x),$$

então,

$$f'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x) f_2(x) \ldots f_n'(x)$$

Em particular, se $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = u(x)$, então

$$f(x) = (u(x))^n \Rightarrow f'(x) = n(u(x))^{n-1} u'(x).$$

Por exemplo:

(i) $f(x) = 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 10x$;

(ii) $f(x) = 7x^3 + 4x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = 21x^2 + 8x + 5$;

(iii) $f(x) = (x^2 + x + 1)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(x^2 + x + 1)^4 (2x + 1)$.

- **Derivada da função quociente**

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções deriváveis no ponto x. Seja $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ com $v(x) \neq 0$. Então,

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Logo, se $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$, então

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Para simplificar a notação, às vezes escrevemos simplesmente,

$$f' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Por exemplo:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$;

(ii) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 2 - 2x \cdot 1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2};$$

$$\text{(iii)}\ \ f(x)=\frac{x+1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2\cdot 1-(x+1)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=\frac{-x-2}{x^3}.$$

Resumindo:

Seja $f(x)$ uma função de x, então temos as seguintes regras de derivação:

(i) $f(x)=k$ $\Rightarrow f'(x)=0$, *onde* k *é uma constante;*

(ii) $f(x)=ax+b$ $\Rightarrow f'(x)=a$, *onde* a *e* b *são constantes;*

(iii) $f(x)=x^n$ $\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$, *onde* $n\in\mathbb{Q}$, *racionais;*

(iv) $f(x)=g(x)+h(x)$ $\Rightarrow f'(x)=g'(x)+h'(x)$;

(v) $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x)=u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)$,

(vi) $f(x)=(u(x))^n$ $\Rightarrow f'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x)$;

(vii) $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$, $v(x)\neq 0$.

Derivada das funções trigonométricas, exponencial e logarítmica

A seguir apresentaremos as fórmulas (sem demonstração) para o cálculo de derivadas de algumas funções trigonométricas, da exponencial e logarítmica.

- **Derivada da função seno**

Seja $f(x) = \text{sen } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = \left(\text{sen } x\right)' = \cos x .$$

- **Derivada da função cosseno**

Seja $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = \left(\cos x\right)' = -\text{ sen } x .$$

- **Derivada da função tangente**

Seja $f(x) = \text{tg } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = \left(\text{tg } x\right)' = \sec^2 x .$$

- **Derivada da função exponencial**

Seja $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $a \neq 1$, então

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a .$$

Em particular, quando $a = e$, então

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x .$$

- **Derivada da função logarítmica**

Seja $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $a \neq 1$, então

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} .$$

Em particular,

$$f(x) = \log_e x = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} .$$

Vamos agora resolver alguns exemplos, calculando a derivada de algumas funções, utilizando as regras apresentadas.

Preste atenção para em seguida aplicar seus conheicmentos.

Exemplo 5.11 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6 .$$

Resolução: Usando as regras (iv) e (i) do resumo, vem

$$f'(x) = \left(7x^3 - 3x^2 + 5x - 6\right)' = \left(7x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + \left(5x\right)' + 6' ,$$

ou,

$$f'(x) = 7 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 5 \cdot x^{1-1} + 0 = 21x^2 - 6x + 5 .$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, é dada por

$$f'(x) = 21x^2 - 6x + 5 .$$

Exemplo 5.12 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = x^{-4} - 2\cos x + \text{sen } x .$$

Resolução: Usando as regras (iv) do resumo e 5.4.1, vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{-4} - 2 \cdot \cos x + \text{sen } x\right)' \\ &= \left(x^{-4}\right)' - \left(2 \cdot \cos x\right)' + \left(\text{sen } x\right)' \\ &= -4 \cdot x^{-4-1} - 2\left(-\text{sen } x\right) + \cos x \\ &= -4 \cdot x^{-5} + 2 \cdot \text{sen } x + \cos x . \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x) = x^{-4} - 2 \cdot \cos x + \text{sen } x$ é a função

$$f'(x) = -4x^{-5} + 2 \text{ sen } x + \cos x .$$

Exemplo 5.13 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right) \cdot \left(3x^2 - 2x + 5\right) .$$

Resolução: Inicialmente, vamos considerar

$$u(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \text{ e } v(x) = 3x^2 - 2x + 5 .$$

Assim,

$$u'(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right)' = 6x^2 - 10x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3 ,$$

ou

$$u'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$

e

$$v'(x) = \left(3x^2 - 2x + 5\right)' = 6x - 2 + 0 = 6x - 2\,.$$

Agora, usando a regra (v) do resumo,vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x) \\ &= \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right)\left(6x - 2\right) + \left(3x^2 - 2x + 5\right)\left(6x^2 - 10x + 3\right) \\ &= 30x^4 - 76x^3 + 87x^2 - 68x + 17\,. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função

$$f(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right)\left(3x^2 - 2x + 5\right)$$

é dada por

$$f'(x) = 30x^4 - 76x^3 + 87x^2 - 68x + 17\,.$$

Exemplo 5.14 Encontrar a derivada de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\cos x}$.

Resolução: Usando a regra (vii) do resumo, vem

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\cos x}\right)' &= \frac{\cos x\cdot\left(\ln x\right)' - \ln x\cdot\left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2} \\ &= \frac{\cos x\cdot\dfrac{1}{x} - \ln x\cdot(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\dfrac{\cos x}{x} + \ln x\cdot\text{sen } x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\dfrac{\cos x + x\cdot\ln x\cdot\text{sen } x}{x}}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x + x\cdot\ln x\cdot\text{sen } x}{x\cdot\cos^2 x} \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função

$$f(x) = \frac{\ln x}{\cos x},$$

é a função dada por

$$f'(x) = \frac{\cos x + x \cdot \ln x \cdot \operatorname{sen} x}{x \cdot \cos^2 x}.$$

Exemplo 5.15 *Determinar a derivada de*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

Resolução: Pela regra (vii) do resumo, temos

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)' = \frac{\left(x^2-4\right)\cdot\left(x+1\right)' - \left(x+1\right)\cdot\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2-4\right)\cdot 1 - \left(x+1\right)\cdot\left(2x\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$= \frac{x^2-4-2x^2-2x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x-4}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Portanto, a derivada da função

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

é a função dada por

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x-4}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Responda aos exercícios propostos aplicando o que você estudou nesta seção. Caso tenha dúvidas releia o conteúdo e busque ajuda junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 2

- Obtenha a derivada de cada função a seguir:

1) $f(x) = -5$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 8$.

3) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$.

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{5}}$.

5) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$.

7) $f(x) = 10 \cdot \log_2 x + \operatorname{tg} x + \sqrt[3]{x}$.

8) $f(x) = x^4 - 2\cos x + 3 \operatorname{sen} x$.

9) $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{tg} x$.

Derivada de função composta (ou regra da cadeia)

Sejam $y = f(x)$ e $u = g(x)$ duas funções, tais que suas derivadas existam e exista a derivada da função $y = f(g(x))$, que indicaremos por $\dfrac{dy}{dx}$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

ou ainda,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Logo,

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

A derivada obtida acima, da **função composta**, também é conhecida como **regra da cadeia**.

Exemplo 5.16 *Encontrar a derivada da função* $y = \text{sen}\, x^2$.

Resolução: Temos de $y = \text{sen}\, x^2$, $y = \text{sen}\, u$, onde $u = x^2$, $\dfrac{dy}{du} = \cos u$ e $\dfrac{du}{dx} = 2x$.

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u)\ 2x = (\cos x^2)\ 2x = 2x \cos x^2 .$$

Portanto, a derivada de $y = \text{sen}\, x^2$ é a função $y' = 2x\cos x^2$.

Exemplo 5.17 *Determinar a derivada da função* $y = e^{4x}$.

Resolução: Temos, $y = e^{4x}$, então $y = e^u$, onde $u = 4x$, $\dfrac{dy}{du} = e^u$ e $\dfrac{du}{dx} = 4$.

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u\ 4 = 4\ e^{4x},$$

Portanto, a derivada de $y = e^{4x}$ é a função $y' = 4\ e^{4x}$.

Exemplo 5.18 *Calcular a derivada de* $y = \cos^3 x$.

Resolução: Como $y = \cos^3 x = \left(\cos x\right)^3$, temos $y = u^3$ onde $u = \cos x$.

Agora, $\dfrac{dy}{du} = 3 \cdot u^2$ e $\dfrac{du}{dx} = -\text{sen}\, x$.

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2(-\text{sen}\, x) = -3 \cdot \left(\cos x\right)^2 \cdot \text{sen}\, x = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}\, x .$$

Portanto, a derivada de $y = \cos^3 x$ é a função $y' = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}\, x$.

Aplicações da regra de derivação de função composta

Nesta seção você vai conhecer algumas regras, aplicando diretamente a regra da cadeia ou derivada de função composta. Leia com atenção dando especial atenção aos exemplos.

- **Derivada da função dada por** $y = u^n$ **onde** $u = u(x)$**, é uma função derivável num ponto** x **e** $n \in \mathbb{R}$

Se $y = u^n$ então $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

Exemplo 5.19 *Determinar a derivada de*

$$y = \left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^4.$$

Resolução: Aqui,

$$u = x^3 - 4x^2 + x - 2, \; n = 4 \text{ e } u' = 3x^2 - 8x + 1.$$

Assim, $y = u^4$.

Logo,

$$y' = 4 \cdot (u)^{4-1} u' = 4 \cdot u^3 \cdot u' = 4\left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^3 \left(3x^2 - 8x + 1\right).$$

Portanto, a derivada de $y = \left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^4$ é a função

$$y' = 4 \cdot \left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^3 \cdot \left(3x^2 - 8x + 1\right).$$

Exemplo 5.20 *Calcular a derivada de*

$$y = \cos^3 x.$$

Resolução: Como $y = \cos^3 x = (\cos x)^3$, temos $u = \cos x$, $n = 3$ e $u' = -\text{sen } x$. $y = u^3$.

Logo,

$$y' = 3 \cdot u^{3-1}.u' = 3 \cdot u^2 \cdot u' = 3 \cdot (\cos x)^2 \cdot (-\text{sen } x) = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen } x.$$

Portanto, a derivada de $y = \cos^3 x$ é a função $y' = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen } x$.

Exemplo 5.21 *Encontrar a derivada de*

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Resolução: Sabemos que

$$y = \sqrt{1 + x^2} = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$u = 1 + x^2,\ n = \frac{1}{2} \text{ e } u' = 0 + 2x = 2x\,.$$

Assim, $y = u^{\frac{1}{2}}$.

Logo,

$$y' = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} \cdot u' = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{u'}{2 \cdot u^{\frac{1}{2}}} = \frac{u'}{2 \cdot \sqrt{u}} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

Portanto,

$$y = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

- **Derivada da função dada por $y = \operatorname{sen} u$, onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y = \operatorname{sen} u$ então $y' = \cos u \cdot u'$.

Exemplo 5.22 *Determinar a derivada de*

$$y = \operatorname{sen}\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right).$$

Resolução: Aqui,

$$u = x^3 - 4x^2 + 3x - 7 \text{ e } u' = 3x^2 - 8x + 3\,.$$

Assim, $y = sen\ u$.

Logo,

$$y' = \cos u \cdot u' = \left(\cos(x^3 - 4x^2 + 3x - 7)\right)\left(3x^2 - 8x + 3\right).$$

Portanto,

$$y = \operatorname{sen}\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right) \Rightarrow$$

$$y' = \left(3x^2 - 8x + 3\right)\cos\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right).$$

- **Derivada da função dada por $y = \cos u$, onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

  Se $y = \cos u$ então $y' = -sen\ u \cdot u'$.

Exemplo 5.23 *Determinar a derivada de*

$$y = \cos\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right).$$

Resolução: Aqui,

$$u = x^3 - 4x^2 + 3x - 7 \text{ e } u' = 3x^2 - 8x + 3.$$

Assim, $y = \cos u$.

Logo,

$$y' = -\text{sen } u \cdot u' = -\left(sen(x^3 - 4x^2 + 3x - 7)\right) \cdot \left(3x^2 - 8x + 3\right).$$

Portanto,

$$y = \cos\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right) \Rightarrow$$
$$y' = -\left(3x^2 - 8x + 3\right)\text{sen}\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right).$$

- **Derivada da função dada por $y = e^u$ onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

  Se $y = e^u$ então $y' = e^u \cdot u'$.

Exemplo 5.24 *Encontrar a derivada de*

$$y = e^{-\frac{1}{3} \cdot x^3}.$$

Resolução: Aqui,

$$u = -\frac{1}{3} \cdot x^3 \text{ e } u' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = -1 \cdot x^2 = -x^2 \text{ ou } u' = -x^2.$$

Assim, $y = e^u$

Logo,

$$y' = e^u \cdot u' = e^{-\frac{1}{3} \cdot x^3} \cdot \left(-x^2\right)$$

Portanto, a derivada de $y = e^{-\frac{1}{3} \cdot x^3}$ é a função $y' = e^{-\frac{1}{3} \cdot x^3} \cdot \left(-x^2\right)$.

Exemplo 5.25 *Calcular a derivada de*

$$y = e^{3+\ln x}.$$

Resolução: Temos $u = 3 + \ln x$ e $u' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. Aplicando diretamente a regra acima, vem

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3+\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{3+\ln x}}{x}.$$

Portanto, a derivada de $y = e^{3+\ln x}$ é a função $y' = \frac{e^{3+\ln x}}{x}$.

- **Derivada da função dada por $y = a^u$ onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y = a^u$ então $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$. Em particular, se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$.

Exemplo 5.26 *Determinar a derivada de*

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+x-1}.$$

Resolução: Temos $a = \frac{1}{5}$, $u = x^3 + x - 1$ e $u' = 3x^2 + 1$.
Logo,

$$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+x-1} \cdot \left(3x^2+1\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right).$$

Portanto, a derivada da função $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+x-1}$ é a função $y' = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+x-1} \cdot \left(3x^2+1\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right)$.

Exemplo 5.27 *Calcular a derivada de*

$$y = 3^{\ln x}.$$

Resolução: Temos $a = 3$, $u = \ln x$ e $u' = \frac{1}{x}$.

Logo,

$$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a = 3^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln 3 .$$

Portanto, a derivada de $y = 3^{\ln x}$ é a função $y' = 3^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln 3$.

- **Derivada da função dada por** $y = \ln u$ **onde** $u = u(x)$ **é uma função derivável num ponto** x**.**

Se $y = \ln u$ então $y' = \frac{u'}{u}$. Em particular se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 5.28 *Determinar a derivada de*

$$y = \ln\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Resolução: Aqui temos $u = -\frac{1}{2}x^2$ e $u' = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = -x$.

Logo,

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{-x}{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{2}{x}.$$

Portanto, a derivada de $y = \ln\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ é a função $y' = \frac{2}{x}$.

Exemplo 5.29 *Calcular a derivada de*

$$y = \ln\left(x \cdot e^{x+2}\right).$$

Resolução: Aqui temos $u = x \cdot e^{x+2}$. Para encontrarmos u' vamos utilizar a regra da derivada do produto de duas funções, assim

$$u' = x \cdot \left(e^{x+2}\right)' + \left(x\right)' \cdot e^{x+2} = x \cdot e^{x+2} \cdot \left(x+2\right)' + 1.e^{x+2}$$

$$\Rightarrow u' = x \cdot e^{x+2}.1 + e^{x+2} = x \cdot e^{x+2} + e^{x+2} = e^{x+2} \cdot \left(x+1\right),$$

Aplicando a regra de derivação acima, temos

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{e^{x+2} \cdot (x+1)}{x \cdot e^{x+2}} = \frac{x+1}{x},$$

Portanto,

$$y = \ln\left(x \cdot e^{x+2}\right) \Rightarrow y' = \frac{x+1}{x}.$$

- **Derivada da função dada por $y = \log_a u$, onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y = \log_a u$ então $y' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Exemplo 5.30 *Determinar a derivada de*

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right).$$

Resolução: Observe que $a = \dfrac{1}{3}$ e $u = x^2 - \dfrac{3}{5}x + 2$. Logo, $u' = 2x - \dfrac{3}{5}$.

Aplicando a regra de derivação acima, temos

$$y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} = \frac{2x - \frac{3}{5}}{\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Portanto, a derivada de

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right)$$

é a função

$$y' = \frac{2x - \frac{3}{5}}{\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Exemplo 5.31 *Calcular a derivada de*

$$y = \log\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

Resolução: Aqui, $a = 10$ e $u = \dfrac{1+x}{x}$. Para encontrarmos u' vamos utilizar a regra de derivação do quociente entre duas funções, assim

$$
\begin{aligned}
u' = \left(\frac{1+x}{x}\right)' &= \frac{x\cdot(1+x)' - (1+x)\cdot x'}{x^2} \\
&= \frac{x\cdot 1 - (1+x)\cdot 1}{x^2} = \frac{x-(1+x)}{x^2} \\
&= \frac{x-1-x}{x^2} = \frac{-1}{x^2},
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a regra de derivação acima, temos

$$y' = \frac{u'}{u\cdot \ln a} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}\cdot \ln 10} = \frac{-1}{x^2\cdot\frac{1+x}{x}\cdot \ln 10} = \frac{-1}{x\cdot(1+x)\cdot \ln 10},$$

ou seja,

$$y' = \frac{-1}{x\cdot(1+x)\cdot \ln 10}.$$

Portanto, a derivada de

$$y = \log\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

é a função

$$y' = \frac{-1}{x\cdot(1+x)\cdot \ln 10}.$$

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure, então, resikver aos exercícios propostos. Não deixe de procurar o Sistema de Acompnhameneto caso tenha dúvidas

Exercícios propostos – 3

- Obtenha a derivada de cada função a seguir:

1) $y = \log_a x^2$.
2) $y = \ln(x^3 + 1)$.
3) $f(x) = 3 \text{ sen } 2x$.
4) $g(x) = \text{sen}(\cos x)$.
5) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$.
6) $h(x) = (2x^3 + 4x + 1)^5$.
7) $h(x) = \dfrac{1}{(2x^3 + 4x + 1)^5}$.
8) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x - 2}{x + 1}}$.
9) $h(x) = \log\left(1 - 5x\right)^4$.
10) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1}$.
11) $y = x^x$.
12) $y = (\text{sen } x)^x$.

Derivada de função inversa

Seja $y = f(x)$ uma função inversível, derivável no ponto x, onde $f'(x) \neq 0$. A função inversa de $y = f(x)$ que representaremos por $x = g(y)$, é derivável no ponto y sendo $y = f(x)$, sua derivada é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ou seja, se $y = f(x)$, função dada, e $x = g(y)$, sua inversa, então $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Exemplo 5.32 *Calcular a derivada da função inversa de* $y = f(x) = 5x - 7$.

Resolução: Inicialmente vamos calcular a função inversa de $y = f(x) = 5x - 7$ que é $x = g(y)$. Aplicando a regra prática para encontrarmos a função inversa de uma dada função, estudada na seção 3.7, temos

$$y = 5x - 7 \Rightarrow x = 5y - 7 \Rightarrow 5y = x + 7 \Rightarrow y = \frac{x+7}{5},$$

ou ainda,

$$x = g(y) = \frac{y+7}{5}.$$

Assim, a função inversa de $f(x) = 5x - 7$ é $x = g(y) = \frac{y+7}{5}$ e $f'(x) = 5$.

Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{5}.$$

De fato, calculando a derivada da função $g(y)$ em relação a y, temos:

$$g'(y) = \left(\frac{y+7}{5}\right)' = \frac{1}{5}.$$

Portanto, a derivada da função inversa de

$$y = f(x) = 5x - 7,\ g(y) = \frac{y+7}{5}$$

é dada por:

$$g'(y) = \frac{1}{5}.$$

Exemplo 5.33 *Determine a derivada da inversa da função* $y = f(x) = x^3$ *para* $x > 0$.

Resolução: Vamos calcular a função inversa de $y = f(x) = x^3$ aplicando a regra prática estudada na seção 3.7. Assim, a função inversa da função $y = f(x) = x^3$ é $x = g(y) = \sqrt[3]{y}$, $y \in (0, \infty)$ e $f'(x) = 3x^2 \neq 0$ para todo $x > 0$, logo

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}.$$

Portanto, a derivada da inversa da função $f(x) = x^3$ para $x > 0$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ é

$$g'(y) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}.$$

Exemplo 5.34 *Calcular a derivada da inversa da função* $y = f(x) = x^2$ *para todo* $x > 0$.

Resolução: A derivada de f é $f'(x) = 2x$ e a função inversa de $y = f(x) = x^2$, aplicando a regra prática, é $x = g(y) = \sqrt{y}$ para $y > 0$, logo

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \text{ ou } g'(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

Portanto, a derivada da inversa da função $y = f(x) = x^2$ para todo $x > 0$, $g(y) = \sqrt{y}$ é $g'(y) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$.

Exemplo 5.35 *Calcular a derivada da função inversa de* $y = f(x) = x^3 - 2$ *no ponto* $y = 6$*, ou seja,* $g'(6)$.

Resolução: A derivada da função f é $f'(x) = 3x^2$. Vamos calcular a função inversa de $y = f(x) = x^3 - 2$ que é $x = g(y)$, aplicando a regra prática, temos

$$y = x^3 - 2 \Rightarrow x = y^3 - 2 \Rightarrow x + 2 = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+2},$$

ou ainda,

$$x = g(y) = \sqrt[3]{y+2}.$$

Assim, a função inversa de $y = f(x) = x^3 - 2$ é $x = g(y) = \sqrt[3]{y+2}$.
Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3 \cdot x^2} = \frac{1}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{y+2}\right)^2},$$

ou seja,

$$g'(y) = \frac{1}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{y+2}\right)^2}.$$

Como queremos calcular $g'(6)$, vem

$$g'(6) = \frac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{6+2}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot(2)^2} = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}.$$

Portanto, a derivada da função inversa de $y = f(x) = x^3 - 2$, $g(y) = \sqrt[3]{y+2}$, no ponto $y = 6$ é $\frac{1}{12}$.

Será que você entendeu o que discutimos sobre a Derivada de Função inversa? Responda os exercícios, caso tenha dúvidas busque esclarece-las antes de prosseguir seus estudos.

Exercícios propostos – 4

1) Calcular a derivada da função inversa de $y = f(x) = \sqrt[5]{x}$ no ponto $y = 1$.

2) Determinar a derivada da função inversa de $y = f(x) = 2x^2 - 3$.

3) Determinar a derivada da função inversa de $y = f(x) = 5 - 7x$.

4) Determinar a derivada da função inversa de $y = f(x) = x^4 + 1$.

Derivadas sucessivas

Suponha que f é uma função derivável no intervalo I. Se a função $f'(x)$, chamada de derivada primeira de $f(x)$, é derivável no mesmo intervalo, então existe a função derivada de $f'(x)$, indicada como $f''(x)$ que é chamada de derivada segunda de $f(x)$. Diz-se, então, que $f(x)$ é duas vezes derivável.

Seguindo esse procedimento sucessivamente e, supondo que $f(x)$ é n vezes derivável, obtém-se a função derivada n-ésima, ou derivada de ordem n, de $f(x)$ indicada como $f^{(n)}(x)$. As funções $f'(x)$, $f''(x)$,...., $f^{(n)}(x)$, são as derivadas sucessivas de $f(x)$.

Exemplo 5.36 *Determinar todas as derivadas da função*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação estudadas, temos

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x,$$
$$f''(x) = 6x + 4,$$
$$f'''(x) = 6,$$
$$f^{iv}(x) = 0,$$
$$f^{n}(x) = 0, \forall n \geq 4.$$

Portanto, todas as derivadas da função $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ é $f^{n}(x) = 0$, $\forall n \geq 4$.

Exemplo 5.37 *Obtenha a derivada terceira da função*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação, temos

$$f(x) = \frac{1}{x},$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$
$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Portanto, a derivada terceira de $f(x) = \frac{1}{x}$ é $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Exemplo 5.38 *Obtenha a derivada de ordem 4 da função*

$$f(x) = e^{-2x}.$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação, temos

$$f(x) = e^{-2x},$$
$$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x},$$
$$f''(x) = 4 \cdot e^{-2x},$$
$$f'''(x) = -8 \cdot e^{-2x},$$
$$f''''(x) = 16 \cdot e^{-2x}.$$

Portanto, a derivada de ordem 4 ou a quarta derivada da função $f(x) = e^{-2x}$ é $f''''(x) = 16 \cdot e^{-2x}$ e consequentemente,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot e^{-2x} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 5.39 *Determinar a segunda derivada da função*

$$f(x) = sen\left(x^2 + 1\right).$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação, vem

$$f(x) = \text{sen}\left(x^2 + 1\right),$$
$$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(x^2 + 1\right),$$
$$f''(x) = -4x^2 \ \text{sen}\left(x^2 + 1\right) + 2\cos\left(x^2 + 1\right).$$

Portanto, a segunda derivada de $f(x) = \text{sen}\left(x^2 + 1\right)$ é

$$f''(x) = -4x^2 \ \text{sen}\left(x^2 + 1\right) + 2\cos\left(x^2 + 1\right).$$

Procure, resolver os exercícios propostos. Esta é uma forma de Certificar-se que entendeu o conteúdo abordado. Caso tenha dificuldades busque auxílio junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 5

1) Calcular todas as derivadas da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) Calcular todas as derivadas da função $f(x) = a^x$.

3) Determinar a segunda derivada da função $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2$.

4) Determinar a segunda derivada da função $f(x) = \cos\left(x^3 + 2\right)$.

5) Determinar a segunda derivada da função $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

A Diferencial

Suponha que a função f seja definida por $y = f(x)$ e f seja derivável em x_0. A variação sofrida por f, quando se passa do ponto x_0 ao ponto $x_0 + \Delta x$ é

$$\Delta y = \Delta f = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0).$$

Usando o símbolo $\approx$, significando "é *aproximadamente igual* a", dizemos que:

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x,$$

se Δx for suficientemente pequeno. O lado direto da expressão acima é definido como a **diferencial** de y. Isto nos motiva a seguinte definição.

Se a função f é definida por $y = f(x)$, então a diferencial de y, no ponto x_0, denotada por dy ou df é dada por

$$df = f'(x_0)\Delta x$$

onde x_0 está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x_0.

Observação *ote que df depende de Δx e é fácil perceber que quanto menor for Δx, mais próximo df estará de Δf. Assim, podemos dizer que:*

$$df \cong \Delta f \text{ para pequenos valores de } \Delta x.$$

Dessa forma, a diferencial de uma função pode ser usada para calcular aproximadamente variações de f, para pequenos valores de Δx.

Exemplo 5.40 *Consideremos a função $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$ e $x_0 + \Delta x = 1{,}01$, logo $\Delta x = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$. Calcular Δf e df:*

Resolução: Vamos calcular inicialmente Δf dado por $\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$, assim,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0) \\
&= f(1{,}01) - f(1) \\
&= 3\cdot\left(1{,}01\right)^2 - 3\cdot 1^2 \\
&= 3\cdot 1{,}0201 - 3\cdot 1 \\
&= 3{,}0603 - 3 = 0{,}0603
\end{aligned}.$$

Para calcularmos a diferencial de f no ponto $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0{,}01$, temos

$$f'(x) = 6x \text{ e } f'(1) = 6\cdot 1 = 6,$$

Assim,

$$df = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(1)\cdot 0{,}01 = 6\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Não é difícil de observar que $df \cong \Delta f$.

Portanto,

$$\Delta f = 0{,}0603 \text{ e } df = 0{,}06.$$

Exemplo 5.41 *Calcule a diferencial de* $y = f(x) = x^2$ *no ponto* $x_0 = 2$ *e* $\Delta x = 0{,}01$.

Resolução: Sabemos que a diferencial de uma função f no ponto x_0 é dada por:

$$df = f'(x_0)\Delta x \text{ ou } df = f'(2)\cdot 0{,}01.$$

Como

$$f'(x) = 2x \text{ e } f'(2) = 2\cdot 2 = 4,$$

vem,

$$df = f'(2)\cdot 0{,}01 = 4\cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

Portanto, a diferencial de $y = f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0{,}01$ é $df = 0{,}04$.

Exemplo 5.42 *Seja a função* $y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$, *encontre* Δy *e* dy *para*

(i) qualquer x *e* Δx;

(ii) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;

(iii) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$;

(iv) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

Resolução: (i) Vamos calcular inicialmente Δy. Como $y = 4x^2 - 3x + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta y &= 4(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 - f(x) \\
&= 4\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 3x - 4x^2 + 1 - \left(4x^2 - 3x + 1\right) \\
&= 4x^2 + 8x\cdot\Delta x + 4\cdot\left(\Delta x\right)^2 - 3x - 3\cdot\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1 \\
&= 8x\cdot\Delta x - 3\cdot\Delta x + 4\left(\Delta x\right)^2 \\
&= \left(8x - 3\right)\cdot\Delta x + 4\left(\Delta x\right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta y = \left(8x-3\right)\cdot\Delta x + 4\cdot\left(\Delta x\right)^2.$$

Agora, vamos calcular dy. Sabemos que $dy = f'(x)\cdot\Delta x$. A derivada de

$$y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

em relação a x é

$$f'(x) = 8x - 3.$$

Assim,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (8x - 3)\Delta x$$

Portanto,

$$dy = (8x - 3) \cdot \Delta x.$$

Os resultados para as partes (ii), (iii) e (iv) são apresentados no quadro abaixo, onde

$$\Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2 \text{ e } dy = (8x - 3)\Delta x$$

x	Δx	Δy	dy
2	0,1	1,34	1,3
2	0,01	0,1304	0,13
2	0,001	0,013004	0,013

Responda os exercícios e certifique-se que entendeu o conteudo tratatdo, antes de prosseguir seus estudos.

Exercícios propostos – 6

1) Determinar a diferencial da função $f(x) = \cos x$ no ponto $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ para $\Delta x = \dfrac{1}{2}$.

2) Calcular dy da função $y = f(x) = e^{-x^2}$ no ponto $x_0 = 0$ para

$\Delta x = 0{,}01$.

3) Obtenha a diferencial de $y = f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ no ponto $x_0 = 2$ para $\Delta x = 0{,}1$.

4) Seja a função $y = f(x) = x^2 - 5x$. Calcular Δy e dy para $x_0 = -1$ e $\Delta x = 0{,}01$.

Funções marginais

Em Administração e Economia, dada uma função $f(x)$, costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x. **Chama-se função marginal de $f(x)$ à função derivada de $f(x)$**. Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita, e assim por diante. Nesta seção veremos algumas funções marginais.

Função custo marginal

Suponha que $C(x)$ seja o custo total de produção de x unidades de certo produto, com $x \geq 0$ e $C(x) \geq 0$. A função C é chamada de **função custo total** e temos a seguinte definição.

*Se $C(x)$ é o custo total de produção de x unidades de um produto, então o **custo marginal** quando $x = x_0$, é dado por $C'(x_0)$, caso exista. A função $C'(x)$ é chamada **função custo marginal**.*

Assim, pela seção 5.8,

$$C'(x_0) \cong \Delta C = C(x_0 + 1) - C(x_0).$$

Portanto, o custo marginal é aproximadamente igual à variação do custo, decorrente da produção de uma unidade adicional, a partir de x_0 unidades.

Na definição acima, $C'(x_0)$ pode ser interpretada como a **taxa de variação** do custo total quando $x = x_0$ unidades são produzidas.

Exemplo 5.43 *Suponhamos que* $C(x)$ *seja o custo total de fabricação de* x *pares de calçados da marca WW, dado pela equação* $C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$. *Determinar o custo marginal quando* $x = 50$.

Resolução: Vamos calcular a derivada da função $C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$, ou seja, $C'(x) = 4 + 0{,}04x$ e $C'(50) = 4 + 0{,}04 \cdot 50 = 6$. Assim sendo, a taxa de variação do custo total, quando 50 pares de calçados da marca WW são fabricados, é R$6,00 por par fabricado.

O custo de fabricação do qüinquagésimo primeiro par de calçados é

$$C'(50) \cong \Delta C = C(51) - C(50)$$

e

$$C(51) - C(50) = 110 + 4 \cdot 51 + 0{,}02 \cdot (51)^2 - \left(110 + 4 \cdot 50 + 0{,}02 \cdot (50)^2\right)$$
$$= 366{,}02 - 360 = 6{,}02$$

Assim,

$$C'(50) \cong \Delta C = C(51) - C(50) = 6{,}02.$$

Logo, $C'(50)$ é o custo aproximado da produção do qüinquagésimo primeiro par de calçados da marca WW.

Portanto, o custo marginal quando $x = 50$ é $C'(50) = 6$.

Exemplo 5.44 *Consideremos a função custo* $C(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}4x^2 + 400x + 200$, *determinar o custo marginal para* $x = 20$.

Resolução: Inicialmente, vamos calcular a derivada da função

$$C(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}4x^2 + 400x + 200,$$

ou seja,

$$C'(x) = 0{,}06x^2 - 0{,}8x + 400$$

e

$$C'(20) = 0{,}06 \cdot (20)^2 - 0{,}8 \cdot 20 + 400 = 408.$$

Como $C'(20) \cong \Delta C = C(21) - C(20)$, vem

$$\begin{aligned} C'(20) &\cong \left(0{,}02\cdot(21)^3 - 0{,}4\cdot(21)^2 + 400\cdot 21 + 200\right) \\ &\quad -\left(0{,}02\cdot(20)^3 - 0{,}4\cdot(20)^2 + 400\cdot 20 + 200\right) \\ &\cong 8.608{,}82 - 8.200 = 408{,}82 . \end{aligned}$$

Logo, $C'(20)$ é o custo aproximado da produção do vigésimo primeiro item.

Portanto, o custo marginal quando $x = 20$ é $C'(20) = 408$.

Função receita marginal

Suponha que $R(x)$ seja a receita total obtida pela venda de x unidades de um produto, então temos a seguinte definição.

*Se $R(x)$ é a receita obtida quando x unidades de um produto são demandadas, então a **receita marginal**, quando $x = x_0$, é dado por $R'(x_0)$, caso exista. A função $R'(x)$ é chamada **função receita marginal**. $R'(x_0)$ pode ser positiva, negativa ou nula, e pode ser interpretada como a taxa de variação da receita total quanto $x = x_0$ unidades são demandadas.*

Assim, pela seção 5.8,

$$R'(x_0) \cong \Delta R = R(x_0 + 1) - R(x_0) .$$

Portanto, a receita marginal é aproximadamente igual à variação da receita decorrente da venda de uma unidade adicional, a partir de x_0 unidades.

Exemplo 5.45 *Suponha de* $R(x)$ *seja a receita total recebida na venda de* x *cadeiras da loja BBC, e* $R(x) = -4x^2 + 2000x$. *Calcular a receita marginal para* $x = 40$.

Resolução: Inicialmente, vamos calcular a derivada da função $R(x) = -4x^2 + 2000x$, ou seja,

$$R'(x) = -8x + 2000 \text{ e } R'(40) = -8 \cdot 40 + 2000 = 1.680.$$

Como,

$$\begin{aligned} R'(40) &\cong R(41) - R(40) \\ &\cong -4 \cdot \left(41\right)^2 + 2000 \cdot 41 - \left(-4 \cdot (40)^2 + 2000 \cdot 40\right) \\ &\cong 75.276 - 73.600 = 1.676. \end{aligned}$$

Logo, $R'(40)$ é a receita efetiva da venda da quadragésima primeira cardeira.

Portanto, a receita marginal quando $x = 40$ é $R'(40) = 1.680$.

Exemplo 5.46 *Consideremos a função receita total da venda de* x *estantes dada por* $R(x) = 500x - \frac{x^2}{2}$. *Calcular a receita marginal para* $x = 50$.

Resolução: Calculando a derivada da função $R(x) = 500x - \frac{x^2}{2}$, temos,

$R'(x) = 500 - x$ e $R'(50) = 500 - 50 = 450$.

Como,

$$R'(50) \cong R(51) - R(50) = 500 \cdot 51 - \frac{\left(51\right)^2}{2} - \left(500.50 - \frac{(50)^2}{2}\right)$$

$$\cong 24.199{,}50 - 23.750 = 449{,}50.$$

Logo, $R'(50)$ é a receita efetiva da venda da qüinquagésima cadeira.

Portanto, a receita marginal quando $x = 50$ é $R'(50) = 450$.

Função produtividade marginal

Consideremos uma função de produção P que dependa da quantidade x de um fator de produção variável. Chama-se **função produtividade marginal** do fator à derivada da função P em relação a x.

Exemplo 5.47 *A quantidade* P *(em toneladas) produzida por mês de certo produto e* x *o trabalho mensal envolvido (medido em homens-hora) é dada pela função produção* $P(x) = 1016\sqrt{x}$. *Determinar a produtividade marginal quando* $x = 64$.

Resolução: Vamos calcular a derivada da função $P(x) = 1016\sqrt{x}$ em relação a x, que é a função produtividade marginal do fator trabalho mensal, logo

$$P(x) = 1016\sqrt{x} = 1016\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P'(x) = 1016\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 508x^{-\frac{1}{2}} = 508\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{508}{\sqrt{x}},$$

ou seja,

$$P'(x) = \frac{508}{\sqrt{x}}.$$

Calculando a produtividade marginal quando $x = 64$, temos

$$P'(64) = \frac{508}{\sqrt{64}} = \frac{508}{8} = 63{,}5.$$

Assim, se o número de homens-hora passar de 64 para 65, o aumento na produção mensal será, aproximadamente, 63,5 toneladas.

Portanto, a produtividade marginal da função produção $P(x) = 1.016\cdot\sqrt{x}$ quando $x = 64$ é 63,5 toneladas.

Exemplo 5.48 *Considere a função produção* $P(H) = 500\cdot\sqrt{H} - 6H$, *onde* P *é a produção mensal (em toneladas), e* H, *o número de homens-hora empregados. Calcular:*

a) função produtividade marginal, $P'(H)$;

b) $P'(100)$.

Resolução: a) Vamos calcular a derivada da função P em relação a H, logo

$$P(H) = 500 \cdot \sqrt{H} - 6H = 500 \cdot H^{\frac{1}{2}} - 6H$$

$$\Rightarrow P'(H) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot H^{\frac{1}{2}-1} - 6 = 250 \cdot H^{-\frac{1}{2}} - 6$$

$$= 250 \cdot \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} - 6 = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6,$$

ou seja,

$$P'(H) = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6.$$

Portanto, a função produtividade marginal é

$$P'(H) = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6.$$

b) Agora, vamos calcular $P'(100)$, isto é,

$$P'(100) = \frac{250}{\sqrt{100}} - 6 = \frac{250}{10} - 6 = 25 - 6 = 19.$$

Portanto, $P'(100) = 19$.

Chegamos ao final de mais uma seção. Vamos ver se você entendeu o que foi estuado? Reponda aos exercícios.

Exercícios Propostos – 7

1) O custo total da produção de x unidades de certo produto é dado por $C(x) = 800x - \frac{x^2}{40}$. Calcular:

a) a função custo marginal;

b) o custo marginal para $x = 1.000$;

c) o número de unidades produzidas quando o custo marginal é \$ 600.

2) Dada a função custo $C(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}5x^2 + 20x + 200$, obtenha o custo marginal para $x = 50$ e $x = 100$.

3) Dada a função custo $C(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}5x^2 + 20x + 200$, obtenha o custo médio para $x = 10$.

Sugestão. O custo médio, *CM*, é dado por $CM = \dfrac{C(x)}{x}$.

4) Dada a função receita $R(x) = -3x^2 + 1.500x$ obtenha a receita marginal quando $x = 250$.

5) A receita total recebida da venda de x televisores em cores é dada por $R(x) = 700x - \dfrac{x^3}{40}$. Determinar:

a) a função receita marginal;

b) a receita marginal quando $x = 20$.

6) Dada da função receita total $R(x) = -20x^2 + 1500x$, determinar a receita média para $x = 10$.

Sugestão. A receita medida, *RM*, é dada por $RM = \dfrac{R(x)}{x}$.

7) A quantidade P (em kilograma) produzida por dia de certo produto é x. O trabalho diário envolvido (medido em homens-hora) é dada pela função produção $P(x) = 100 \cdot \sqrt{x} + x^2 - 5x + 7$. Determinar:

a) a função produtividade marginal;

b) a produtividade marginal quando $x = 36$.

Tabela: derivadas e identidades trigonométricas

- ***Derivadas:*** Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \quad \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}u'$.
2. $y = u\,v \quad \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \quad \Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u', \quad (a > 0,\, a \neq 1)$.
5. $y = e^u \quad \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$.
7. $y = \ln u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u}u'$.
8. $y = u^v \quad \Rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\ln u)\,v'$.
9. $y = \text{sen } u \quad \Rightarrow y' = u'\cos u$.
10. $y = \cos u \quad \Rightarrow y' = -u'\,\text{sen } u$.
11. $y = \text{tg } u \quad \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$.
12. $y = \text{cotg } u \quad \Rightarrow y' = -u'\,\text{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec u \quad \Rightarrow y' = u'\sec u\,\text{tg } u$.
14. $y = \text{cosec } u \quad \Rightarrow y' = -u'\,\text{cosec } u\,\text{cotg } u$.
15. $y = arc\ \text{sen } u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\ \cos u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc\ \text{tg } u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\ \cot g\ u \quad \Rightarrow \dfrac{-u'}{1+u^2}$.
19. $y = arc\ \sec u, |u| \geq 1 \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

20. $y = arc \text{ cosec } u, |u| \geq 1 \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, |u| > 1.$

- ***Identidades Trigonométricas***

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x.$
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x.$
4. $\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}.$
5. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}.$
6. $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x.$
7. $2 \text{ sen } x \cos y = \text{sen}(x - y) + sen(x + y).$
8. $2 \text{ sen } x \text{ sen } y = \cos(x - y) - \cos(x + y).$
9. $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y).$
10. $1 \pm \text{sen } x = 1 \pm \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right).$

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados neste capítulo consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.
- SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/supeior/superior.htm
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Neste capítulo, você estudou a taxa média de variação, estudou também a definição de derivada de uma função e realizou cálculos de derivadas de diversos tipos de função, tais como, derivada da função produto e função quociente, derivada da função composta (ou regra da cadeia) e aplicações da regras de derivação de função composta, derivadas sucessivas, a diferencial e algumas funções marginais. Resta mencionar que a compreensão sempre referida é importante para que você possa acompanhar a disciplina. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos. Consulte o tutor do pólo sempre que achar necessário.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) 0. b) 1. c) $\frac{1}{18}$. d) $\frac{7}{3}$. e) -1.

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x + 1} + \sqrt{x_0 + 1}\right)}.$$

3) $$\frac{\Delta C}{\Delta x} = x_0 + 0{,}5 \cdot \Delta x + 1.$$

- **Exercícios propostos – 2**

1) $f'(x) = 0$.

2) $f'(x) = x^2 - x + 4$.

3) $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$.

4) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$.

5) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2}\ln x\right)$.

6) $f'(x) = \frac{-x \operatorname{sen} x - 2\cos x}{x^3}$.

7) $f'(x) = \frac{10}{x \cdot \ln 2} + \sec^2 x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

8) $f'(x) = 4x^3 + 2 \operatorname{sen} x + 3\cos x$.

9) $f'(x) = x^3 \cdot \sec^2 x + 3x^2 \cdot \operatorname{tg} x$.

- **Exercícios propostos – 3**

1) $y' = \frac{2}{x}\ln a$.

2) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$.

3) $f'(x) = 6 \cdot \cos(2x)$.

4) $g'(x) = -\text{sen } x \cdot \cos(\cos x)$.

5) $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

6) $h'(x) = 5 \cdot (2x^3 + 4x + 1)^4 \cdot (6x^2 + 4)$

7) $h'(x) = \dfrac{-5 \cdot \left(6x^2 + 4\right)}{\left(2x^3 + 4x + 1\right)^6}$.

8) $f'(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{\left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x+1\right)^2}$.

9) $h'(x) = \dfrac{-20}{(1-5x) \cdot \ln 10}$.

10) $y' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

11) $y' = x^x(1 + \ln x)$.

12) $y' = (\text{sen } x)^x \left[\ln(\text{sen } x) + x \text{ cotg } x\right]$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) 5.

2) $g'(y) = \dfrac{1}{4 \cdot \left(\sqrt{\dfrac{y+3}{2}}\right)}$.

3) $-\dfrac{1}{7}$.

4) $g'(y) = \dfrac{1}{4 \cdot \left(\sqrt[4]{y-1}\right)^3}$.

- **Exercícios propostos – 5**

1) $f^{n}(x) = (-1)^{n} \dfrac{n!}{x^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$

2) $f^{n}(x) = a^{x}(\ln a)^{n}, \forall n.$

3) $f''(x) = 24x^{2} - 18x + 8.$

4) $f''(x) = -9x^{4} \cdot \cos\left(x^{3}+2\right) - 6x \cdot sen\left(x^{3}+2\right).$

5) $f''(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$

- **Exercícios propostos – 6**

1) $df = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

2) $dy = 0.$

3) $df = 0{,}1.$

4) $dy = -0{,}0700$ e $\Delta y = -\,0{,}070.$

- **Exercícios propostos – 7**

1) a) $C'(x) = 800 - \dfrac{x}{20}$; b) 750; c) 4.000.

2) 2.020 e 8.520.

3) $CM = 45.$

4) $R'(250) = 0.$

5) a) $R'(x) = 700 - \dfrac{3x^{2}}{40}$; b) 670.

6) 1.300.

7) a) $P'(x) = \dfrac{50}{\sqrt{x}} + 2x - 5$; b) 75,33.

UNIDADE

6

Aplicações de Derivadas

Aplicações de Derivadas

Objetivos

- Nesta unidade você vai enunciar o teorema do valor médio; escrever e analisar a fórmula de Taylor; identificar e aplicar a Regra de L'Hospital; e localizar, aplicar e analisar os pontos de máximos e mínimos de uma função.

Aplicações de Derivadas

Teorema do Valor Médio (TVM)

A partir deste momento, passaremos a estudar seqüência, limites e continuidade de uma função real. Leia com atenção, caso tenha dúvidas busque esclarece-las nas bibliografias indicadas e também junto ao Sistema de Acompanhamento

Suponha que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e que $f'(x)$ exista no intervalo aberto $a < x < b$. Então, existe pelo menos um valor c entre a e b, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente, o teorema afirma que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto $\left(c, f(c)\right)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $A = \left(a, f(a)\right)$ e $B = \left(b, f(b)\right)$, como indica a figura 6.1 a seguir:

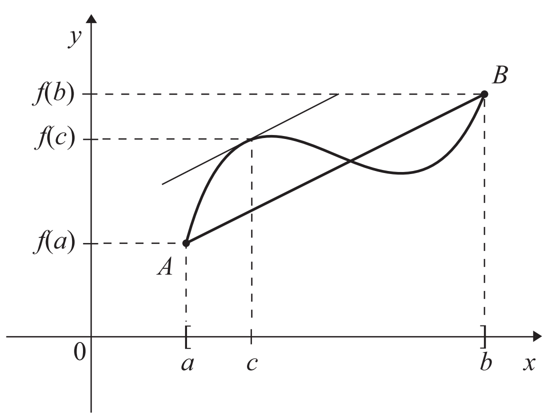


Figura 6.1

Exemplo 6.1 *Seja* $f(x) = x^2$ *definida no intervalo* $[-1,3]$. *Calcular o valor de* c *que o TVM garante existir.*

Resolução: Aqui $a = -1$ e $b = 3$. Vamos calcular $f(a)$ e $f(b)$, assim

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 = 1 \text{ e } f(b) = f(3) = 3^2 = 9\,.$$

Como $f(x) = x^2$ é contínua para todo x, $f'(x) = 2x$ existe em $-1 < x < 3$ e $f'(c) = 2c$ para $-1 < c < 3$, temos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 2c = \frac{9 - 1}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1,$$

ou seja,

$$c = 1\,.$$

Portanto, o valor de c que o TVM garante existir em $(-1,3)$ vale 1.

Exemplo 6.2 Seja $f(x) = x^3$, $a = -2$ e $b = 2$. *Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema do valor médio.*

Resolução: A função é um polinômio e como tal satisfaz as hipóteses do TVM. Queremos determinar $c \in (-2,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Assim, $f'(x) = 3x^2$ e $f'(c) = 3c^2$ para $c \in (-2,2)$. Então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = 4\,,$$

de forma que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Logo, os dois valores de c são: $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $c_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$ entre $a = -2$ e $b = 2$, nos quais a tangente à curva $y = x^3$ é paralela à corda que passa pelos pontos $(-2,-8)$ e $(2,8)$.

Portanto, os pontos onde se verifica a afirmação do TVM são

$$c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ e } c_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor é uma extensão do teorema do valor médio. Isto nos motiva a seguinte definição:

Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas f', f'',..., $f^{(n-1)}, f^{(n)}$ sejam contínuas em $[a,b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a,b). Então, a fórmula de Taylor ou polinômio de Taylor de ordem n, no ponto a, da função f é definida por

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observação *No caso de $a = 0$ temos*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

*a qual é chamado de **fórmula de Maclaurin** de $f(x)$.*

A fórmula de Taylor pode ser utilizada para calcular um valor aproximado de determinada função por meio de somas parciais, por exemplo, calcular um valor aproximando de $\ln(3,74)$, $e^{4,289}$, etc.

Exemplo 6.3 *Seja* $f(x) = \ln x$. *Determine a fórmula ou o polinômio de Taylor no ponto* $a = 1$, *de ordem:*

(i) 3;

(ii) n, *sendo* n *um número natural qualquer.*

(iii) Use o polinômio do item (i) para calcular um valor aproximado de $\ln(1,1)$.

Resolução: Vamos inicialmente determinar o polinômio de Taylor de ordem 3, no ponto $a = 1$, ou seja, devemos ter

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Assim,

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$;

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$;

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$;

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2!$;

$f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{iv}(1) = -3!$;

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$.

Logo, respondendo (i), vem

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

ou,

$$\ln x = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3,$$

ou seja,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Agora, para responder (ii), vem

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Finalmente, respondendo (iii), temos

Para calcular $\ln(1,1)$, fazendo $x = 1,1$ em (i), vem

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3.$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\ln(1,1) = 0,09533.$$

Exemplo 6.4 *Determinar a fórmula ou o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto zero da função $f(x) = e^x$.*

Resolução: Vamos determinar a expressão

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

É dado que $f(x) = e^x$, então

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x,$$

e

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Logo,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Portanto, a fórmula ou o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto zero da função $f(x) = e^x$ é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Isto significa que para valores de x próximos de zero,

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Observação *Quanto maior n, melhor a aproximação.*

Por exemplo, fazendo $x = 1$ e $n = 6$, obtemos:

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

De fato, a soma à direita aproxima o número té a terceira casa decimal, sendo o "erro" igual a $2{,}26\times10^{-4}$.

Exemplo 6.5 *Seja a função* $f(x)=\sqrt{x}$. *Obter uma aproximação de Taylor de terceira ordem no ponto* $a=9$.

Resolução: Vamos determinar

$$f(x)=f(9)+\frac{f'(9)}{1!}(x-9)+\frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2+\frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3.$$

Assim,

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad \Rightarrow f(9)=\sqrt{9}=3,$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}}=-\frac{1}{4x\sqrt[2]{x}}$$

$$\Rightarrow f''(9)=-\frac{1}{4\cdot9\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{4\cdot9\cdot3}=-\frac{1}{108},$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{8}.x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\cdot\sqrt[2]{x^5}}=\frac{3}{8\cdot x^2\cdot\sqrt[2]{x}}$$

$$\Rightarrow f'''(9)=\frac{3}{8\cdot9^2\cdot\sqrt[2]{9}}=\frac{3}{8\cdot81\cdot3}=\frac{1}{648}.$$

Logo,

$$f(x)=f(9)+\frac{f'(9)}{1!}(x-9)+\frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2+\frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3,$$

ou seja,

$$f(x)=3+\frac{\frac{1}{6}}{1!}(x-9)+\frac{-\frac{1}{108}}{2!}(x-9)^2+\frac{\frac{1}{648}}{3!}(x-9)^3,$$

isto é,

$$f(x)=3+\frac{1}{6\cdot1}(x-9)-\frac{1}{108\cdot2}(x-9)^2+\frac{1}{648\cdot6}(x-9)^3$$

Portanto, a aproximação de Taylor de terceira ordem de $f(x)=\sqrt{x}$ no ponto $a=9$ é

$$f(x)=\sqrt{x}=3+\frac{1}{6}(x-9)-\frac{1}{216}(x-9)^2+\frac{1}{3888}(x-9)^3.$$

Por exemplo, um valor aproximado de $\sqrt{5}$ seria

$$\sqrt{5} \cong 3 + \frac{1}{6}(5-9) - \frac{1}{216}(5-9)^2 + \frac{1}{3888}(5-9)^3,$$

ou seja,

$$\sqrt{5} \cong 3 + \frac{(-4)}{6} - \frac{(-4)^2}{216} + \frac{(-4)^3}{3888},$$

ou seja,

$$\sqrt{5} \cong 3 - \frac{4}{6} - \frac{16}{216} - \frac{64}{3888}$$

$$= 3 - 0,6667 - 0,0741 - 0,0165$$

$$= 3 - 0,7572 = 2,2428.$$

Portanto,

$$\sqrt{5} \cong 2,2428.$$

GLOSSÁRIO

Regra de L'Hospital*: foi incorporada por Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hospital, em 1696. Seu objetivo é calcular o limite de frações nos casos em que há indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Regra de L´Hospital

Vamos estudar, nesta seção, outra aplicação das derivadas, que consiste num modo bastante útil de calcular limites de formas indeterminadas, a chamada Regra (ou Teorema) de L'Hospital*, que nos permite levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, estudadas na unidade 4, provenientes do cálculo do limite do quociente de duas funções deriváveis.

Nesta seção, queremos calcular o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, nos seguintes casos

(a) $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$;

(b) $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$.

Em ambos, calculamos $f'(x)$, $g'(x)$ e $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existe, segue que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ também existe. Caso a indeterminação continua, isto é, $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfazem (a) e (b), calcule $f''(x)$ e $g''(x)$ e $\lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. E assim por diante.

Exemplo 6.6 *Usando a regra de L'Hospital, calcular o valor do limite*

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}.$$

Resolução: Aqui $f(x)=x^2-x-12$ e $g(x)=x^2-3x-4$. Aplicando o Teorema 4.3, da seção 4.2.2 letras (d) e (a), vem

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-x-12)=4^2-4-12=0$$

e

$$\lim_{x\to 4} g(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)=4^2-3\cdot 4-4=0.$$

Como $\lim_{x\to 4} f(x)=0$ e $\lim_{x\to 4} g(x)=0$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Calculando $f'(x)$ vem $f'(x)=2x-1$ e calculando $g'(x)$ vem $g'(x)=2x-3$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{2x-3}=\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 4-3}=\frac{7}{5}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{7}{5}.$$

Exemplo 6.7 *Calcular* $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}$.

Resolução: Aqui $f(x)=x$ e $g(x)=1-e^x$. Aplicando o Teorema 4.3 da seção 4.2.2, letras (d) e (a), vem

$$\lim_{x\to 0} x=0 \text{ e } \lim_{x\to 0}(1-e^x)=1-e^0=1-1=0.$$

Como $\lim_{x\to 0} x=0$ e $\lim_{x\to 0}(1-e^x)=0$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Calculando $f'(x)$ e $g'(x)$ vem $f'(x)=1$ e $g'(x)=-e^x$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-e^x}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=-1.$$

Exemplo 6.8 *Calcular* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

Resolução: Como $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}.$$

A indeterminação continua. Aplicando novamente a regra, vem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Exemplo 6.9 Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \log x\right).$$

Resolução: Aplicando o Teorema 4.3, da seção 4.2.2, letra (c), vem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\log x\right) = \log\left(\lim_{x\to 0} x\right) = \infty.$$

Temos uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$, pois $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, no caso, $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$, quando $x \to 0$.
Vamos escrever

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

obtendo assim as indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \log x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-2}},$$

ou,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-2}}.$$

Como $\lim_{x\to 0}\left(\log x\right) = \log\left(\lim_{x\to 0} x\right) = \infty$ e $\lim_{x\to 0} x^{-2} = \infty$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(x^{-2}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2 \cdot x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-2 \cdot x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1-(-3)}}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \log x\right) = 0.$$

Máximos e mínimos de uma função

Esta seção tem como objetivo estudar aplicações da derivada para determinar os valores máximos e mínimos de uma função. Para isto, necessitamos da seguinte definição.

Dada a função $f : I \to \mathbb{R}$, um ponto $x_0 \in I$ é chamado de

(i) ponto de máximo relativo (ou local) da função, quando $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$;
(ii) ponto de mínimo relativo (ou local) da função, quando $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* $x \in I$.
O valor $f(x_0)$ é chamado de máximo ou mínimo relativo (ou local) de f, e $\left(x_0, f(x_0)\right)$ são as coordenadas do ponto de máximo ou mínimo relativo (ou local) de f.

Os máximos e mínimos de uma função são também chamados de extremos relativos.

Dada a função $f(x)$, um ponto x_0 onde f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$ ou f não é derivável em x_0 é chamado de ponto crítico da função f.

Exemplo 6.10 *Seja a função $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar os pontos críticos de f.*

Resolução: Sabemos que $f(x) = x^3 - 3x^2$ é uma função polinomial derivável em todo $x \in \mathbb{R}$.
Calculando $f'(x)$, temos $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\left(x - 2\right)$
Agora $f'(x) = 0$ implica em $3x^2 - 6x = 0$, ou seja, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos da função $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Exemplo 6.11 Determinar o ponto crítico da função $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}, x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Calculando $f'(x)$, temos

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}},$$

ou,

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}.$$

A função dada não derivável em $x = 1$, isto é, não existe $f'(1)$. Nesse caso, $x = 1$ é o único ponto crítico de f.

Exemplo 6.12 *Calcular os pontos críticos da função* $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, *no intervalo* $[-2, \frac{1}{2}]$.

Resolução: Inicialmente temos $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, então $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Fazendo $f'(x) = 0$, vem $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Resolvendo a equação pela fórmula de Bháskara, encontramos as raízes $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{3}$.

Portanto, $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{3}$ são os pontos críticos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ em $[-2, \frac{1}{2}]$.

Seja f uma função derivável em x_0. Se f tem um máximo ou mínimo relativo (ou local) em x_0, então $f'(x_0) = 0$.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$, para $x \in (-1, 1)$, tem derivada $f'(x) = 2x$. Em $x = 0$, a função tem um mínimo relativo e $f'(0) = 0$.

Vimos na Unidade 3, que dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, f é crescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$ e f é decrescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

O teorema a seguir estabelece um critério para determinar onde uma função f é crescente ou decrescente.

Teorema *Seja $f(x)$ uma função derivável no intervalo $(a,\ b)$, então*

(a) Se $f'(x)=0$ em $(a,\ b)$, então $f(x)$ é constante em $(a,\ b)$;

(b) Se $f'(x)>0$ em $(a,\ b)$, então $f(x)$ é crescente em $(a,\ b)$;

(c) Se $f'(x)<0$ em $(a,\ b)$, então $f(x)$ é decrescente em $(a,\ b)$.

Exemplo 6.13 *Seja $f(x)=x^2$. Determinar os intervalos onde f é crescente e decrescente.*

Resolução: Temos $f(x)=x^2$ e $f'(x)=2x$.

Agora, $f'(x)=2x\le 0$ se, e somente se, $x\le 0$ então $f'(x)\le 0$, logo, f é decrescente em $(-\infty,0]$ e $f'(x)=2x\ge 0$ se, e somente se, $x\ge 0$ então $f'(x)\ge 0$, logo, f é crescente em $(-\infty,0]$.

Utilizando o sistema de sinais, podemos interpretar assim:

x	$f(x)$	**Conclusão**
$x<0$	$-$	$f(x)$ decrescente em $(-\infty,0]$
$x>0$	$+$	$f(x)$ crescente em $[0,-\infty)$

Veja a figura abaixo:

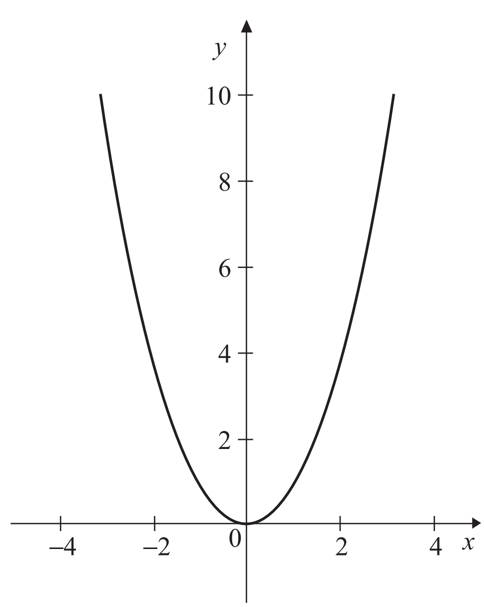


Figura 6.2

Exemplo 6.14 *Determinar os intervalos onde f é crescente e decrescente, onde $f(x) = x^3$.*

Resolução: De $f(x) = x^3$ temos $f'(x) = 3x^2$. Agora, $3x^2 \geq 0$ então $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e f é crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.15 Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ definida para todo x real. Determinar os intervalos onde f é crescente e decrescente.

Resolução: Temos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ então $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Agora, fazendo $f'(x) = 0$, vem $3x^2 - 12x + 9 = 0$. Resolvendo esta equação pela regra de Bhaskara, temos as raízes $x = 3$ e $x = 1$. Logo, $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Utilizando o sistema de sinais, podemos interpretar assim,

x	$f(x)$	**Conclusão**
1	0	ponto crítico de f
$x < 1$	+	f é crescente
$1 < x < 3$	−	f é decrescente
$x = 3$	0	ponto crítico de f
$x > 3$	+	f é crescente

Portanto, $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1]$ e $[3, \infty)$ e decrescente em $[1, 3]$. Também $x = 3$ e $x = 1$ são extremos da função (pontos críticos).

Teste da segunda derivada para extremos relativos

Este teste é empregado para pesquisar o(s) ponto(s) de máximo(s) e mínimo(s) relativo de uma dada função. Para isto, temos a seguinte definição.

Seja x_0 um ponto crítico de uma função, na qual $f'(x_0) = 0$ e f' existe para todos os valores de x, em algum intervalo aberto que contenha o ponto x_0. Então, $f''(x_0)$ existe e:

(i) se $f''(x_0) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em x_0;
(ii) se $f''(x_0) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em x_0.

Exemplo 6.16 *Pesquisar máximos e mínimos relativos da função $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$, pelo critério ou teste da segunda derivada.*

Resolução: Temos, $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$, então:
$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$.
Agora, $f'(x) = 0$ vem $4x^3 + 4x^2 - 8x = 0$. Fatorando a expressão $4x^3 + 4x^2 - 8x = 0$, vem

$$4x(x^2 + x - 2) = 4x(x+2)(x-1) = 0.$$

A partir desta fatoração, fica claro que $f'(x)$ será igual a zero se, e somente

$$x = 0,\ x = -2 \text{ e } x = 1.$$

Logo, $x = 0$, $x = -2$ e $x = 1$ são pontos críticos da função f.
Vamos analisar agora, os pontos críticos obtidos separadamente. Calculando $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8.$$

Analisando para $x = 0$, vem $f''(0) = 12 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$, assim, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo da função f e seu valor no ponto $x = 0$ é $f(0) = 0^4 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 = 0$ ou $f(0) = 0$.
Analisando para $x = 1$, vem $f''(1) = 12 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 8 = 12 > 0$, assim $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo da função f e seu valor no ponto é $f(1) = 1^4 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 = 1 + \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$ ou $f(1) = -\frac{8}{3}$.

Finalmente, analisando para $x = -2$, vem
$f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 8 = 12 \cdot 4 - 16 - 8 = 24 > 0$.

Assim, $x = -2$ é um ponto de mínimo relativo da função f e seu valor no ponto é:

$$f(-2) = (-2)^4 + \frac{4}{3}\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2)^2 = 16 + \frac{4}{3}\cdot(-8) - 4\cdot 4 = -\frac{32}{3},$$

ou seja,

$$f(-2) = -\frac{32}{3}.$$

Portanto, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo da função f, $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo da função f e $x = -2$ é um ponto de mínimo relativo da função f. Veja a figura abaixo:

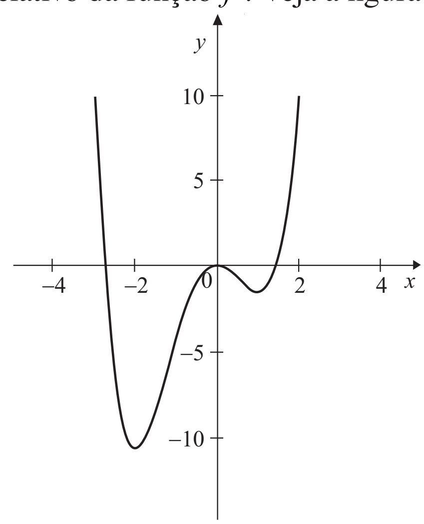


Figura 6.3

Exemplo 6.17 *Encontrar os extremos relativos da função* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ *usando o critério da segunda derivada.*

Resolução: Temos, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, então $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e $f''(x) = 6x - 12$.

Agora, para calcular os pontos críticos de f é só igualar $f'(x)$ a zero, ou seja, $f'(x) = 0$, isto é, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, fatorando, vem $3(x-3)(x-1) = 0$.

A partir desta fatoração, fica claro que $f'(x)$ será zero se, e somente se, $x = 1$ e $x = 3$.

Logo, $x = 1$ e $x = 3$ são pontos críticos de f.

Vamos determinar agora os extremos relativos de f.

Para $x = 1$, temos $f''(1) = 6\cdot 1 - 12 = -6 < 0$, logo $x = 1$ é um ponto de máximo relativo da função f.

Para $x = 3$, temos $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$, logo $x = 3$ é um ponto de mínimo relativo da função f.

Portanto, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo da função f e $x = 3$ é um ponto de mínimo relativo da função f.

Veja a figura abaixo:

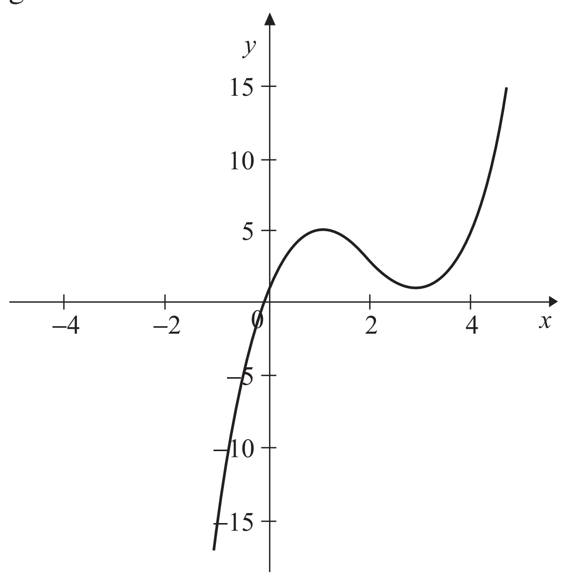


Figura 6.4.

Exemplos práticos

Exemplo 6.18 *A função custo mensal de fabricação de um produto é dada por* $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1$ *e a função de demanda mensal* (p), *do mesmo produto, é dada por* $p(x) = 10 - x$. *Qual o preço* x *que deve ser cobrado para maximizar o lucro?*

Resolução: O lucro total é dado por

$Lucro(L) = \mathrm{Re}\,ceita(R) - Custo(C)$ e a receita será

$\mathrm{Re}\,ceita = p \cdot x$, assim $R = p \cdot x = (10 - x) \cdot x = 10x - x^2$. Logo,

$$L = R - C = 10x - x^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1\right)$$

$$= 10x - x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 10x - 1,$$

ou ainda,

$$L(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 1.$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$L'(x) = -x^2 + 2x \text{ e } L''(x) = -2x + 1.$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-x^2 + 2x = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = 0$ e $x = 2$. Logo, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de L.

Para $x = 0$, temos $L''(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de L.

Para $x = 2$, temos $L''(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de L.

Portanto, o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro é $x = 2$.

Exemplo 6.19 *A empresa "Sempre Alerta" produz um determinado produto, com um custo mensal dado pela função* $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20$. *Cada unidade deste produto é vendido por R$31,00. Determinar a quantidade que deve ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal.*

Resolução: Seja x a quantidade a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal.

O lucro mensal é dado por:

$$Lucro(L) = \mathrm{Re}\,ceita(R) - Custo(C),$$

assim

$$L = R - C = 31x - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20\right)$$

$$= 31x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10x - 20$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$$

ou ainda,

$$L(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20 .$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$L'(x) = -x^2 + 4x + 21 \text{ e } L''(x) = -2x + 4 .$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-x^2 + 4x + 21 = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = -3$ e $x = 7$.

Logo, $x = -3$ e $x = 7$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de L.

Para $x = -3$, temos $L''(-3) = (-2)\cdot(-3) + 4 = 10 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de L.

Para $x = 7$, temos $L''(7) = -2\cdot 7 + 4 = -10 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de L.

Portanto, a quantidade a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal é $x = 7$.

Exercícios propostos - 1

1) Verifique se as condições do teorema do valor médio são satisfeitas pela função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ em $\left[-1,\ 2\right]$. Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema.

2) Seja $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \left[-3,\ 3\right]$. Determine $c \in \left(-3, 3\right)$ pelo TVM tal que $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$.

3) Obtenha uma aproximação de Taylor de quarta ordem da função $f(x) = sen x$ no ponto $x = \pi$

4) Determine a fórmula de Taylor de ordem n da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ no ponto $a = 1$.

5) Dê a fórmula da Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^{-2x}$ no ponto zero.

6) Encontre a fórmula de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = tgx$ no ponto zero.

7) Aplicando a regra de L'Hospital, calcular os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(6x)}{4x}$. b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) \text{tg}\, x \right]$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{senx}$. d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{e^x - 1}$.

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$. f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$. h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 1}$.

8) Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Determine os intervalos onde f é crescente e decrescente.

9) Seja $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, determine:

a) os pontos críticos,

b) os intervalos onde f é crescente e decrescente,

c) os valores máximos e mínimos de f.

10) O custo total de produção de x aparelhos de certa TV Plasma por dia é $R\$\left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right)$ e o preço unitário que elas podem ser vendidas é $R\$\left(50 - \dfrac{1}{2}x\right)$ cada. Qual deve ser a produção diária para que o lucro seja máximo?

11) A produção de bicicletas da empresa "Roda Viva" é de x por mês, ao custo dado por $C(x) = 100 + 3x$. Se a equação de demanda for $p = 25 - \frac{x}{3}$, obtenha o número de unidades que devem ser produzidas e vendidas para maximizar o lucro mensal.

12) A equação de demanda de um produto é $p = 30 - 5\ln x$. Determinar:

a) a função receita $R(x)$;

b) o valor de x que maximiza a receita.

Saiba Mais...

Para aprofundar os temas abordados neste capítulo consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- KUELKAMP, Nilo. **Cálculo 1**. 3ed. Florianópolis: UFSC, 2006.
- LEITHOLD, Louis. **Matemática aplicada à economia e administração**. São Paulo: Harbra, 1988.
- SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

RESUMO

Nesta Unidade, você estudou a importância do Teorema do Valor Médio e viu que a fórmula de Taylor é uma extensão deste teorema. Você aprendeu, também, a calcular limites de formas indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de L'Hospital. Conheceu aplicações da derivada na determinação de pontos de máximos e mínimos.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos - 1**

1) $c = -1 + \sqrt{3}$.

2) $c = 0$

3) $f(x) = senx = (-1)(x - \pi) + \frac{1}{6}(x - \pi)^3$.

4) $f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n + (-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}$

5) $e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4$.

6) $\text{tg } x = x + \frac{x^3}{3!}$.

7) a) $\frac{6}{4}$. b) $\frac{2}{\pi}$. c) 0.

d) 0. (e) $\frac{1}{3}$. (f) 0.

(g) $+\infty$. (h) 3.

8) a) 1 e $-\frac{5}{3}$.

b) f é crescente no intervalo $x < -\frac{5}{3}$;

f é decrescente no intervalo $-\frac{5}{3} < x < 1$;

f é crescente no intervalo $x > 1$.

9) a) 2 e -3.

b) f é crescente no intervalo $x < -3$;

f é decrescente no intervalo $-3 < x < 2$;

f é crescente no intervalo $x > 2$.

c) em $x = -3$, f tem ponto de máximo e em $x = 2$, f tem ponto de mínimo.

10) 10 aparelhos de TV Plasma por dia.

11) 33 bicicletas.

12) a) $R(x) = 30x - 5x \ln x$; b) $x = e^5$.

UNIDADE

7

Cálculo Integral

Cálculo Integral

Objetivos

Nesta unidade você vai: identificar e escrever uma função primitiva; enunciar e aplicar as propriedades da integral indefinida; calcular integrais imediatas; identificar e interpretar a integral de finida, bem como enunciar e aplicar suas propriedades; expressar e aplicar o teorema fundamental do cálculo; calcular integrais usando tabela de integrais imediatas aplicando as técnicas de substituição e por partes; e interpretar e calcular integrais impróprias.

Cálculo Integral

Nesta unidade, passaremos a nos preocupar com o teorema mais importante do cálculo diferencial, que é o Teorema Fundamental do Cálculo. É importante que você compreenda esta temática antes de prosseguir seus estudos. Não esqueça que você não está sozinho, conte com o Sistema de Acompanhamento para auxiliar-lo nas suas dúvidas.

Função primitiva

No estudo da derivada primitiva, tínhamos uma função e obtivemos, a partir dela, uma outra, a que chamamos de *derivada*. Nesta seção, faremos o caminho inverso, isto é, dada a derivada, vamos encontrar ou determinar uma função original, que chamaremos de primitiva. Você deve observar ,que é importante conhecer bem as regras de derivação e as derivadas de várias funções, estudadas no Capítulo 5, para determinar as primitivas. O que acabamos de mencionar, nos motiva a seguinte definição:

*Uma função $F(x)$ é chamada uma **primitiva** da função $f(x)$ em um intervalo I, se para todo $x \in I$, tem-se*

$$F'(x) = f(x).$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.1 *A função* $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ *é uma primitiva da função* $f(x) = x^4$, *pois*

$$F'(x) = \frac{5\,x^4}{5} = x^4 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplo 7.2 *As funções* $T(x) = \dfrac{x^5}{5} + 9$, $H(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2$ *também são primitivas da função* $f(x) = x^4$, *pois* $T'(x) = H'(x) = f(x)$.

Exemplo 7.3 A função $F(x)=\dfrac{e^{-3x}}{-3}$ é uma primitiva da função $f(x) = e^{-3x}$, pois

$$F'(x)=\frac{-3 \times e^{-3x}}{-3}=e^{-3x}=f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 7.4 A função $F(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ é uma primitiva da função $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pois

$$F'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x), x>0.$$

Observação *Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Se $F: I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f: I \to \mathbb{R}$, então para qualquer constante real k, a função $G(x)$ dada por $G(x)=F(x)+k$ é também uma primitiva de $f(x)$.*

Se $F, G: I \to \mathbb{R}$ são primitivas de $f: I \to \mathbb{R}$, então existe uma constante real k, tal que $G(x)=F(x)+k$, para todo $x \in I$.

Exemplo 7.5 *Sabemos que* $(\text{sen}\, x)'=\cos x$. *Assim,* $F(x)=\text{sen}\, x$ *é uma primitiva da função* $f(x)=\cos x$ *e toda primitiva da função* $f(x)=\cos x$ *é do tipo* $G(x)=\text{sen}\, x+k$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Assim, $G_1(x)=\text{sen}\, x+10$, $G_2(x)=\text{sen}\, x-50$ *e* $G_3(x)=\text{sen}\, x-\dfrac{3}{4}$ *são todas primitivas da função* $f(x)=\cos x$, *pois*

$$G_1'(x)=G_2'(x)=G_3'(x)=\cos\, x=f(x).$$

Exemplo 7.6 *Encontrar uma primitiva* $F(x)$, *da função* $f(x)=2x^3-4x^2+5x-1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *que satisfaça a seguinte condição* $F(1)=4$.

Resolução: Pela definição de função primitiva temos $F'(x)=f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim, $F(x)$ será uma função cuja derivada será a função $f(x)$ dada. Logo,

$$F(x)=\frac{2}{4}x^4-4\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-x+k,$$

pois

$$F'(x)=\frac{2}{4}\cdot 4x^3-4\cdot 3\frac{x^2}{3}+5\cdot 2\frac{x}{2}-1+0$$

$$= 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = f(x),$$

ou seja,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + k.$$

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(1) = 4$, vamos calcular o valor da constante k, fazendo $x = 1$ na função $F(x)$, isto é,

$$F(1) = \frac{1}{2}(1)^4 - 4\frac{(1)^3}{3} - 5\frac{(1)^2}{2} - 1 + k = 4$$

e resolvendo temos $k = \frac{10}{4}$.

Assim,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + \frac{10}{3}.$$

Portanto,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + \frac{13}{3},$$

é uma função primitiva de

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1,$$

que satisfaz condição $F(1) = 4$.

Exemplo 7.7 *Encontrar uma primitiva* $F(x)$, *da função*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} + x^3 + 2,$$

que satisfaça a seguinte condição $F(0) = 2$.

Resolução: Sabemos que $F(x)$ é uma função cuja derivada é a função $f(x)$ dada. Conforme visto no Capitulo 5, temos

$$\frac{d}{dx}\left(arc\ \text{tg}\ x\right) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ou} \quad \left(arc\ \text{tg}\ x\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Logo,

$$F(x) = arc\ \text{tg}\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + k,$$

pois,

$$F'(x) = \left(arc\ \text{tg}\ x\right)' + \left(\frac{x^4}{4}\right)' + (2x)' + k'$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{4x^3}{4} + 2 + 0$$

$$= \frac{1}{1+\ x^2} + x^3 + 2 = f(x),$$

ou seja,

$$F(x) = arc\ \text{tg}\ x + \frac{x^4}{4} + 2\ x + k\ .$$

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(0) = 2$, com isto vamos calcular o valor da constante k fazendo $x = 0$ na função $F(x)$, isto é,

$$F(x) = arc\ \text{tg}\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + k$$

$$\Rightarrow\ F(0) = arc\ \text{tg}\ 0 + \frac{0^4}{4} + 2\cdot 0 + k = 2$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + 0 + k = 2\ \Rightarrow\ k = 2$$

Assim,

$$F(x) = arc\ tg\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + 2\ .$$

Portanto,

$$F(x) = arc\ tg\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + 2$$

é uma função primitiva de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 + 2$$

que satisfaz a condição $F(0) = 2$.

Exemplo 7.8 *Encontrar uma primitiva* $F(x)$, *da função*

$$f(x) = e^{-3x} + \sqrt{x}\ ,$$

que satisfaça a condição $F(0) = 1$.

Resolução: Sabemos que $F(x)$ será uma função cuja derivada será a função $f(x)$ dada, logo

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k,$$

pois,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)' + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' + k \\ &= -(-3)\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} \\ &= e^{-3x} + x^{\frac{1}{2}} = e^{-3x} + \sqrt{x} = f(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + k.$$

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(0) = 1$, com isto vamos calcular o valor da constante k fazendo $x = 0$ na função $F(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} &F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\,.\,x^{\frac{3}{2}} + k \\ &\Rightarrow \; F(0) = -\frac{e^{-3\,.\,0}}{3} + \frac{2}{3}\,.\,0^{\frac{3}{2}} + k = 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 0 + k = 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3} + 0 + k = 1 \\ &\Rightarrow k = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Assim,

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}.$$

Portanto, $F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}$, é uma função primitiva de $f(x) = e^{-3x} + \sqrt{x}$ que satisfaz a condição $F(0) = 1$.

Integral indefinida

Sabemos que a derivada é um dos conceitos mais importantes do Cálculo. Outro conceito também muito importante é o de Integral. Existe uma estreita relação entre estas duas idéias. Assim, nesta seção, será introduzida a idéia de integral, mostrando sua relação com a derivada.

Se a função $F(x)$ é primitiva da função $f(x)$, a expressão $F(x)+C$ é chamada ***integral indefinida*** *da função $f(x)$ e é denotada por*

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

onde

$\int$ *– é chamado sinal de integração;*

$f(x)$ *– é a função integrando;*

dx *– a diferencial que serve para identificar a variável de integração;*

C *– é a constante de integração.*

Lê-se: Integral indefinida de $f(x)$ em relação a x ou simplesmente integral de $f(x)$ em relação a x.

O processo que permite encontrar a integral indefinida de uma função é chamado **integração**.

Observação *Da definição de integral indefinida, temos as seguintes observações:*

(i) $\int f(x)\,dx = F(x)+C \;\Leftrightarrow\; F'(x)=f(x)$.

(ii) $\int f(x)\,dx$ *representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas as primitivas da função integrando.*

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$.

Vejamos alguns casos, no exemplo a seguir.

Exemplo 7.9

(i) Se $\frac{d}{dx}\left(senx\right) = \cos x$ então $\int \cos x \; dx = senx + C$.

(ii) Se $\frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 4x^3$ então $\int 4x^3 dx = x^4 + C$.

(iii) Se $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ então $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \; dx = \sqrt{x} + C$.

(iv) Se $\frac{d}{dx}\left(tg\; x\right) = \sec^2 x$ então $\int \sec^2 x \; dx = tgx + C$.

(v) Se $\frac{d}{dx}\left(arctg\; x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ então $\int \frac{1}{1+x^2} \; dx = arctgx + C$.

(vi) Se $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}$, então $\int x^{\frac{2}{3}} \; dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$.

Observação *Pelos exemplos acima, temos:*

$$\int f(x)\; dx = F(x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

Isto nos permite que obtenhamos fórmulas de integração diretamente das fórmulas para diferenciação.

Propriedades da integral indefinida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais definidas no mesmo domínio e k uma constante real. Então:

a) $\int k\, f(x)\; dx = k \int f(x)\; dx$.

b) $\int \left(f(x) + g(x)\right)\; dx = \int f(x)\; dx + \int g(x)\; dx$.

Algumas integrais imediatas

Daremos a seguir algumas fórmulas de integrais simples e imediatas.

(i) $\int dx = x + C$.

(ii) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{x+1} + C, \quad n \neq -1$.

(iii) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

(iv) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

(v) $\int e^x dx = e^x + C$.

(vi) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$.

(vii) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$.

(viii) $\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\sec x| + C$.

(ix) $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$.

(x) $\int \sec x \, du = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$.

(xi) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$.

(xii) $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$.

(xiii) $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$.

(xiv) $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$.

(xv) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.

(xvi) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arc \operatorname{tg} \dfrac{x}{a} + C$.

(xvii) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad x^2 > a^2$.

(xviii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$.

(xix) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

(xx) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc \operatorname{sen} \dfrac{x}{a} + C, \quad x^2 < a^2$.

(xxi) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc \sec\left|\frac{x}{a}\right| + C$.

Observação *Apesar de que não estudarmos as funções inversas trigonométricas, mas nas integrais (xvi), (xx) e (xxi) as respostas das integrais é em termos de funções inversas. Estas integrais foram colocadas aqui, apenas para cumprir a tabela. Para conhecimento do leitor:* $arc \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^{-1} x$, $arc \operatorname{sen} x = sen^{-1} x$ *e* $arc \sec x = \sec^{-1} x$.

Usando as propriedades da integral e a tabela de integrais imediatas, vamos calcular, através de alguns exemplos, a integral de funções.

Exemplo 7.10 *Calcular*

$$\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx.$$

Resolução: Das propriedades da integral indefinida e da tabela de integrais imediatas, temos

$$\begin{aligned}
&\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx \\
&\qquad = 7 \int x^4 \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\
&\qquad = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + \operatorname{tg} x + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2,
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Como a soma $C_1 + C_2$ é uma nova constante arbitrária, você escreve $C_1 + C_2 = C$ e vem

$$7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C.$$

Portanto,

$$\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C.$$

Atenção:

Sempre que você tiver uma soma de duas ou mais integrais indefinidas, escreva apenas ***uma constante*** *para indicar a soma das várias constantes de integração.*

Exemplo 7.11 *Calcular*

$$\int\left(3\,e^{x}+\frac{1}{4\,x}-\,\text{sen}\,x\right)\,dx\,.$$

Resolução: Das propriedades da integral, vem

$$\begin{aligned}
\int\left(3\,e^{x}+\frac{1}{4\,x}-\text{sen}\,x\right)\,dx &= \int 3e^{x}\,dx+\int\frac{1}{4\,x}\,dx-\int \text{sen}\,x\,dx\\
&= 3\int e^{x}\,dx+\int\frac{1}{4}\frac{dx}{x}-\int \text{sen}\,x\,dx\\
&= 3\int e^{x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}\,-\int \text{sen}\,x\,dx\\
&= 3e^{x}+\frac{1}{4}\ln|x|-(-\cos\,x)+C\\
&= 3e^{x}+\frac{1}{4}\ln|x|+\cos x+C\,,
\end{aligned}$$

onde utilizamos os resultados da Tabela (v), (iii) e (vii), respectivamente.

Portanto,

$$\int\left(3\,e^{x}+\frac{1}{4\,x}-\text{sen}\,x\right)\,dx=3e^{x}+\frac{1}{4}\ln|x|+\cos x+C\,.$$

Exemplo 7.12 *Calcular*

$$\int\left(4e^{x}-\frac{\text{sen}\,x}{\cos^{2}x}+\frac{4}{x^{5}}\right)\,dx\,.$$

Resolução: Aplicando as propriedades da integral e como $\cos^{2}x=\cos x.\cos x$, vem

$$\begin{aligned}
&\int\left(4e^{x}-\frac{\text{sen}\,x}{\cos^{2}x}+\frac{4}{x^{5}}\right)\,dx\\
&= \int 4\,e^{x}\,dx-\int\frac{\text{sen}\,x}{\cos^{2}\,x}\,dx\;+\int\frac{4}{x^{5}}\,dx\\
&= 4\int e^{x}\,dx-\int\frac{\text{sen}\,x}{\cos x\,\times\,\cos x}\,dx+\int 4\times\frac{1}{x^{5}}\,dx\\
&= 4\int e^{x}\,dx-\int\frac{\text{sen}\,x}{\cos\,x}\times\frac{1}{\cos\,x}\,dx+4\int x^{-5}\,dx
\end{aligned}$$

$$= 4\int e^x\,dx - \int \text{tg}\,x \times \sec x\,dx + 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4\int e^x\,dx - \int \sec x \times \text{tg}\,x\,dx + 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4e^x - \sec x + 4\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$

$$= 4e^x - \sec x + 4\frac{x^{-4}}{-4} + C$$

$$= 4e^x - \sec x + \frac{x^{-4}}{-1} + C$$

$$= 4e^x - \sec x - x^{-4} + C$$

$$= 4e^x - \sec x - \frac{1}{x^4} + C.$$

Portanto,

$$\int\left(4e^x - \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x} + \frac{4}{x^5}\right)dx = 4e^x - \sec x - \frac{1}{x^4} + C.$$

Exemplo 7.13 *O custo fixo de produção da empresa "Sorriso e Esperança" é R\$8.000,00. O custo marginal é dado pela função* $C'(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}12x + 5$. *Determinar a função custo total.*

Resolução: Sabemos que o custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrarmos $C(x)$ devemos calcular a integral indefinida da função custo marginal, ou seja,

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int\left(0{,}03x^2 + 0{,}12x + 5\right)dx$$

$$= \int 0{,}03x^2 dx + \int 0{,}12x\,dx + \int 5\,dx$$

$$= 0{,}03\int x^2 dx + 0{,}12\int x\,dx + 5\int dx$$

$$= \frac{0{,}03}{3}x^3 + \frac{0{,}12}{2}x^2 + 5x + K.$$

Logo,

$$C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}06x^2 + 5x + k.$$

Quando a produção for nula, $x = 0$, o custo fixo será R\$8.000,00, ou seja,

$$8.000 = 0{,}01(0)^3 + 0{,}06(0)^2 + 5(0) + k \text{ e } k = 8.000.$$

Portanto, a função custo total é

$$C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}06x^2 + 5x + 8.000.$$

Exemplo 7.14 *O custo marginal para produção de determinado bem, é dado pela função* $C'(x) = 18\sqrt{x} + 4$. *Se o custo fixo é de R$50,00, escreva a função custo total.*

Resolução: O custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrarmos $C(x)$ devemos calcular a integral indefinida da função custo marginal, ou seja,

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int C'(x)\,dx = \int\left(18\sqrt{x} + 4\right)dx \\
&= \int\left(18\sqrt{x}\right)dx + \int 4dx = 18\int\sqrt{x}\,dx + 4\int dx \\
&= 18\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int dx \\
&= 18\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + k = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + k.
\end{aligned}$$

Logo,

$$C(x) = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + k$$

Quando a produção for nula, $x = 0$, o custo fixo será R$ 50,00, ou seja,

$$50 = 12\cdot(0)^{\frac{3}{2}} + 4\cdot 0 + k \text{ e } k = 50.$$

Portanto, a função custo total é

$$C(x) = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + 50.$$

Conseguiu acompanhar o conteúdo estudado até aqui? Para saber se aprendeu, procure resolver os exercícios propostos sobre função primitiva e integral. Caso encontre dificuldades, busque apoio junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 1

1) Determinar a função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, onde

a) $f(x) = 5x^2 + 7x + 2$.

b) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}}$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ para $x > 1$.

e) $f(x) = e^{4x}$.

2) Encontrar uma função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ dada, que satisfaça a condição inicial dada, onde

a) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x + \cos x - \dfrac{1}{2}x^2$ tal que $F(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x$ tal que $F(1) = \dfrac{1}{2}$.

c) $f(x) = \sec x \times \text{tg}\,x + \cos x$ tal que $F(\dfrac{\pi}{3}) = 2$.

d) $f(x) = x\sqrt[3]{x} + e^x$ tal que $F(0) = 2$.

e) $f(x) = \cos x - \text{sen}\,x$ tal que $F(0) = 0$.

3) Calcular as integrais

a) $\int (x-2)^2 \times (x+2)^2\, dx$.

b) $\int \dfrac{x^{-\frac{1}{3}} + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

c) $\int \left(\dfrac{x^5 + 2x^{-\frac{1}{2}} + 3}{x^2} \right) dx$.

d) $\int (4 - x - x^2)\, dx$.

i) $\int \dfrac{1}{x^3}\, dx$.

Os exercícios propostos nesta seção, contribuirão para amadurecer os conceitos que acabamos de apresentar. As propriedades apresentadas nesta seção, serão utilizadas durante o curso. Por este motivo, é extremamente importante que você tenha resolvido corretamente a

Integral definida

Nas Unidades 5 e 6, tratamos da derivada e suas aplicações. A derivada é um dos conceitos mais importantes do cálculo. Outro conceito também muito importante é o de integral.

Existem dois problemas fundamentais em cálculo: o primeiro é encontrar a inclinação de uma curva em um ponto dado e o segundo é encontrar a área sob a curva. Você viu, na Unidade 5, que o conceito de derivada está ligado ao problema de traçar à tangente a uma curva.

Agora, você verá que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer. Assim, a derivada e a integral são as duas noções básicas em torno das quais se desenvolve todo o cálculo.

Caso tenha dúvidas anote e esclareça antes de prosseguir.

Desejamos que você, nesta seção, possa compreender o conceito de integral definida.

Conceito de área

Já sabemos que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer. Por isso, motivaremos o entendimento do cálculo de área usando o método do retângulo, de uma região R compreendida entre o gráfico de uma função $f(x)$ com valores positivos, o eixo x, em um intervalo fechado $[a,b]$, conforme figura abaixo

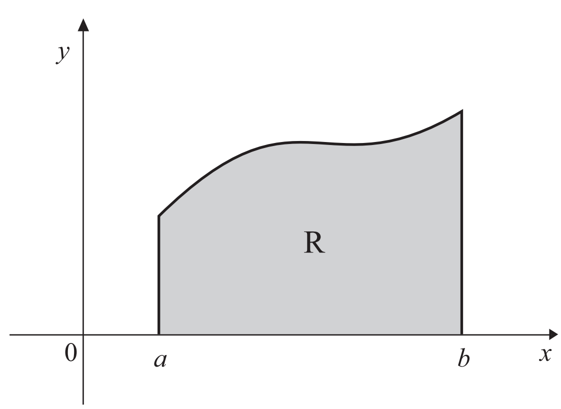


Figura 7.1

Talvez o primeiro contato que você tenha com o conceito de área, seja através da fórmula $A = b \times h$, que dá a área A de um retângulo como o produto da base b pela altura h. Logo a seguir, você tem a área de um triângulo que é igual à metade do produto da base pela altura. Isto decorre do fato de que qualquer triângulo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos, e todo triângulo equivale exatamente a meio retângulo, conforme figura abaixo

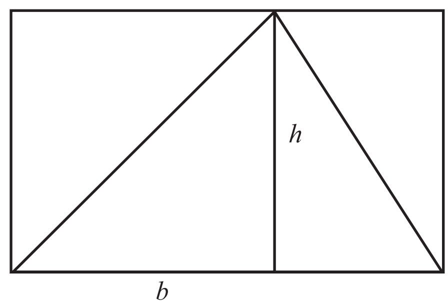


Figura 7.2

Dada a fórmula $A = \frac{1}{2}b \times h$ para a área de um triângulo, pode-se, encontrar a área de qualquer polígono (um subconjunto do plano delimitado por uma "curva" fechada, consistindo em um número finito de segmentos retilíneos).

A razão é que, qualquer figura poligonal pode ser subdividida em triângulos que não se superpõem, e a área do polígono é então a soma das áreas desses triângulos. Essa abordagem de área ,remonta ao Egito e à Babilônia de muitos milênios atrás. Os antigos gregos iniciaram a pesquisa de área de figuras curvilíneas no quinto e quarto século a.C.

Os problemas para o cálculo de área, não apresentam grande dificuldade se a figura plana for um retângulo, um paralelogramo ou um triângulo.

A área de uma figura plana qualquer pode ser calculada aproximando a figura por polígonos, cujas áreas podem ser calculadas pelos métodos da geometria elementar. Isto nos motiva a considerar, agora, o problema de calcular a área de uma região R do plano, limitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de uma função $f(x)$, limitada e não negativa no intervalo fechado $[a,b]$, conforme figura a seguir:

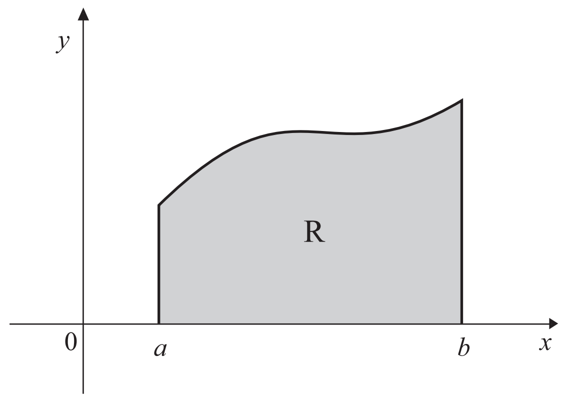


Figura 7.3

Para isso, vamos fazer uma partição P do intervalo $[a,b]$, isto é, vamos dividir o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, por meio dos pontos

$$x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\ ,$$

escolhidos arbitrariamente, da seguinte maneira

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b\,,$$

veja a figura abaixo:

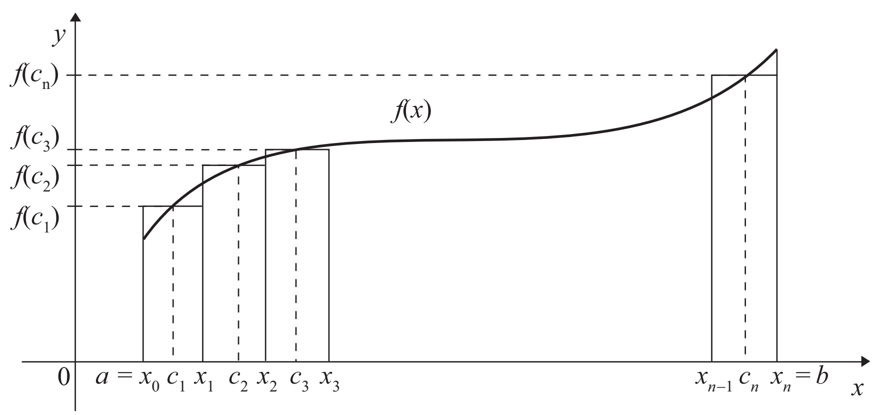


Figura 7.4

O comprimento do i – ésimo subintervalo, $\left[x_{i-1}\ ,\ x_i\right]$, é dado por $\Delta\, x_i\ =\ x_i - x_{i-1}$. Vamos construir retângulos de base $x_i -\ x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde c_i é um ponto do intervalo $\left[x_{i-1}\ ,\ x_i\right]$.

Da figura acima, temos

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$ base do primeiro retângulo;

$\Delta x_2 = x_3 - x_2$ base do segundo retângulo;

... ;

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ base do i-ésimo retângulo; ... ;
$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ base do n-ésimo retângulo e
$f(c_1)$ altura do primeiro retângulo;
$f(c_2)$ altura do segundo retângulo; ... ;
$f(c_i)$ altura do i-ésimo retângulo; ...;
$f(c_n)$ altura do n-ésimo retângulo.

Logo, a área de cada retângulo será

$\Delta x_1 \times f(c_1)$ área do primeiro retângulo;
$\Delta x_2 \times f(c_2)$ área do segundo retângulo; ...;
$\Delta x_i \times f(c_i)$ área do i-ésimo retângulo; ... ;
$\Delta x_n \times f(c_n)$ área do n-ésimo retângulo.

Você já deve ter percebido que, aumentando o número de retângulos, pode-se obter uma melhor aproximação para a área A da região R.

Assim a soma das áreas dos n retângulos, denotada por S_n, será:

$$S_n = f(c_1) \times \Delta x_1 + f(c_2) \times \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \times \Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i$$

Essa soma é chamada *Soma de Riemann* da função f relativa à partição P. Quando n cresce, é "razoável" esperar que a soma das áreas dos retângulos aproxime da área A sob a curva. Deste modo, definimos a medida da área A da região R, como sendo

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i$$

se esse limite existir. E então se diz que a região R é mensurável.

A integral

A integral está associada ao limite apresentado acima. Nesta seção, daremos a definição da integral, que nasceu com a formulação dos problemas de áreas, e citaremos as suas propriedades. Já sabemos que a integral e a derivada, estudadas na Unidade 5, são as duas noções básicas em torno das quais se desenvolve todo o Cálculo. Conforme terminologia introduzida anteriormente, temos a seguinte definição.

Seja $f(x)$ *uma função limitada definida no intervalo fechado* $[a,b]$ *e seja* P *uma partição qualquer de* $[a,b]$. *A integral de* $f(x)$ *no intervalo* $[a,b]$, *denotada por* $\int_a^b f(x)\,dx$, *é dada por*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,.\,\Delta x_i\,,$$

desde que o limite do segundo membro exista.

Destacando:

- *Na notação* $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ *é chamada função integrando,* $\int$ *é o símbolo da integral, e os números* a *e* b *são chamados limites de integração, onde* a *é o limite inferior e* b *é o limite superior da integração.*

- *Se* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe, diz-se que* f *é integrável em* $[a,b]$ *e geometricamente, a integral representa a área da região limitada pela função* $f(x)$, *as retas* $x = a$ e $x = b$ *e o eixo* x, *desde que* $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,\,b]$.

Chamamos a sua atenção, para o fato de que a integral não significa necessariamente uma área. Dependendo do problema, ela pode representar grandezas, como: volume, quantidade de bactérias presentes em certo instante, trabalho realizado por uma força, momentos e centro de massa (ponto de equilíbrio).

A definição de integral pode ser ampliada, de modo a incluir o caso em que o limite inferior seja maior do o limite superior, e o caso em que os limites inferior e superior são iguais, senão vejamos, *Se $a > b$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

se a integral à direita existir.

Se $a = b$ e $f(a)$ *existe, então*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Teorema *Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a,b]$.*

A seguir, algumas propriedades fundamentais da integral definida, que usaremos no curso.

Propriedades da integral definida

As propriedades da integral definida não serão demonstradas, pois foge do objetivo do nosso curso.

P1. Se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e se k é uma constante real qualquer, então

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

P2. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,b]$, então $f(x) \pm g(x)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

P3. Se $a < c < b$ e a função $f(x)$ é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então, $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

P4. Se a função $f(x)$ é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

P5. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

P6. Se $f(x)$ é uma função integrável em $\left[a,\ b\right]$, então $\left|f(x)\right|$ é integrável em $\left[a,\ b\right]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx\,.$$

Observação *Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é, geralmente, uma tarefa árdua. Por isso nosso próximo objetivo é estabelecer o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, o qual nos permite calcular muitas integrais de forma surpreendentemente fácil!*

GLOSSÁRIO

Teorema fundamental do cálculo*: estabelece a importante conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O primeiro surgiu a partir do problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto o segundo surgiu a partir do problema de se encontrar a área de uma figura plana.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Esta subseção contém um dos mais importantes teoremas do cálculo. Este teorema permite calcular a integral de uma função utilizando uma primitiva da mesma, e por isso, é a chave para calcular integrais. Ele diz que, conhecendo uma função primitiva de uma função $f(x)$ integrável no intervalo fechado $[a,b]$, podemos calcular a sua integral.

As considerações acima motivam o teorema a seguir.

Teorema Fundamental do Cálculo* - *se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e se $F(x)$ é uma função de $f(x)$ neste intervalo, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Costuma-se escrever $F(x)\Big|_a^b$ *para indicar* $F(b) - F(a)$.

Destacando:

*O **Teorema Fundamental do Cálculo** (TFC) não só torna o cálculo de integrais mais simples, como também contém em si a relação entre a derivada, o limite e a integral. Isto porque o Teorema Fundamental afirma que o valor da integral,* $\int_a^b f(x)\,dx$*, pode ser calculado com o auxílio de uma função* F*, tal que a derivada de* F *seja igual a* f*, possibilitando encontrar o valor de uma integral utilizando uma primitiva da função integrando.*

Vejamos agora, alguns exemplos aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 7.15 *Determinar*

$$\int_0^2 x\,dx\,.$$

Resolução: Sabemos que $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ é uma primitiva da função $f(x)$, pois,

$$F'(x) = 2 \times \frac{x}{2} = x = f(x)\,.$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\int_0^2 x\,dx = F(x)\Big|_0^2 = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = 2 - 0 = 2\,.$$

Portanto,

$$\int_0^2 x\,dx = 2\,.$$

Exemplo 7.16 *Calcular:*

$$\int_1^3 \left(x^2+4\right)\,dx\,.$$

Resolução: Aqui, temos $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+4x$ que é uma primitiva de $f(x)=x^2+4$, pois

$$F'(x)=3\times\frac{x^2}{3}+4\times 1=x^2+4=f(x)\,.$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\begin{aligned}\int_1^3\left(x^2+4\right)dx&=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_1^3=F(3)-F(1)\\&=\left(\frac{3^3}{3}+4\times 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+4\times 1\right)=\left(9+12\right)-\left(\frac{1}{3}+4\right)\\&=21-\left(\frac{1+12}{3}\right)=21-\frac{13}{3}=\frac{63-13}{3}=\frac{50}{3}\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_1^3\left(x^2+4\right)dx=\frac{50}{3}\,.$$

Observe que podemos calcular a integral $\int_1^3\left(x^2+4\right)dx$ usando as propriedades P1 e P2 da integral definida e o teorema fundamental do cálculo, o resultado será o mesmo. De fato,

$$\begin{aligned}\int_1^3\left(x^2+4\right)dx&=\int_1^3 x^2dx+\int_1^3 4\,dx\\&=\int_1^3 x^2\,dx+4\int_1^3 dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3+4\,x\Big|_1^3\\&=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+4\times\left(3-1\right)=\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)+4\times 2\\&=\frac{26}{3}+8=\frac{26+24}{3}=\frac{50}{3}\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_1^3\left(x^2+4\right)dx=\frac{50}{3}\,.$$

Portanto, usando propriedades da integral definida e o TFC chegamos ao mesmo valor no cálculo da integral $\int_1^3 \left(x^2+4\right)\,dx$ que é $\frac{50}{3}$. Você pode usar sempre este fato.

Exemplo 7.17 *Calcular:*

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Resolução: Sabemos que $F(x)=\sqrt{x}$ é uma primitiva de $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, pois

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x).$$

Logo pelo TFC, temos

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{x}\,\Big|_1^4 = F(4)-F(1)$$

$$=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1.$$

Portanto,

$$\int_1^4 \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\,dx=1.$$

Exemplo 7.18 *Calcular a integral* $\int_0^4 f(x)\,dx$ *, onde:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & se \quad 0\le x\le 2 \\ 2x, & se \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

Resolução: Pela propriedade P3 da integral definida, temos:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx.$$

Como $f(x)=x^2$ para $0\le x\le 2$ e $f(x)=2x$ para $2<x\le 4$, vem

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 2x\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 2\times \frac{x^2}{2}\Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{0}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 0\right) + 2\left(8 - 2\right)$$

$$= \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}.$$

Portanto,

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{44}{3}.$$

Exemplo 7.19 *O custo* $C(x)$ *para produzir a* $x-$*ésima* *TV digital, num programa de produção diária da fábrica* GL*, é dado por* $C(x) = \frac{50}{\sqrt{x}}$*,* $x \le 200$*. Determinar o custo para produzir as 100 primeiras TVs.*

Resolução: Vamos considerar C o valor exato do custo total de produção das 100 primeiras TVs, assim

$$C = C(1) + C(2) + ... + C(100).$$

Esta soma pode ser calculada aplicando o TFC, como segue:

$$C = \int_0^{100} C(x)dx = \int_0^{100} \frac{50}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 50 \cdot \int_0^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 50 \cdot \int_0^{100} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = 50 \cdot \int_0^{100} x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 50 \cdot \left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^{100} = 50 \cdot 2 \cdot \left. x^{\frac{1}{2}}\right|_0^{100} = 100 \cdot \left(\sqrt{100} - \sqrt{0}\right) = 1000.$$

Portanto, o custo C para produzir as 100 primeiras TVs é de R$1.000,00.

Exemplo 7.20 *A mineradora "Natureza Preservada", produz 400 toneladas por mês de certo minério. Estima-se que este processo dure 25 anos (300 meses) a partir de hoje, e que o preço por tonelada do minério da-*

qui a t *meses, em reais, é dado pela função* $f(t) = -0{,}03t^2 + 20t + 400$ *Determinar a receita gerada pela mineradora "Natureza Preservada", ao longo dos 300 meses.*

Resolução: Vamos considerar R a receita da mineradora ao longo dos 300 meses, assim

$$R = 400 \cdot f(1) + 400 \cdot f(2) + \ldots + 400 \cdot f(300).$$

Esta soma pode ser calculada aplicando o TFC, como segue

$$R = 400 \cdot \int_0^{300} f(t)dt = 400 \cdot \int_0^{300} \left(-0{,}03t^2 + 20t + 400\right)dt$$

$$= 400 \cdot \left[\left(-0{,}01t^3 + 10t^2 400t\right)\Big|_0^{300}\right]$$

$$= 400\left[\left(-0{,}01(300)^3 + 10(300)^2 + 400 \cdot 300\right) - \left(-0{,}01(0)^3 + 10(0)^2 + 400 \cdot 0\right)\right]$$

$$= 400 \cdot \left(-270000 + 900000 + 120000\right)$$

$$= 400 \cdot 750000 = 300000000{,}00 \cdot$$

Portanto, a receita R, gerada pela mineradora "Natureza Preservada", ao longo dos 300 meses é R$300.000.000,00.

Exemplo 7.21 *O administrador de uma empresa estima que a compra de um certo equipamento irá resultar em uma economia de custos operacionais. A economia dos custos operacionais dado pela função* $f(x)$ *unidades monetárias por ano, quando o equipamento estiver em uso por* x *anos, e* $f(x) = 4.000x + 1.000$ *para* $0 \le x \le 10$. *Determinar:*

a) a economia em custos operacionais para os cinco primeiros anos;

b) após quantos anos de uso o equipamento estará pago por si mesmo, se o preço de compra é R$36.000,00.

Resolução: A economia obtida nos custos operacionais para os cincos primeiros anos é a integral definida de $f(x) = 4.000x + 1.000$

no intervalo $0 \le x \le 10$, logo, respondendo a letra a), vem

$$\int_0^5 (4.000x + 1.000)\,dx = (2.000x^2 + 1.000x)\Big|_0^5$$
$$= 2.000 \times (25) + 1000 \times 5$$
$$= 55.000.$$

Portanto, a economia nos custos operacionais para os 5 primeiros anos é de R$55.000,00.

Vamos agora responder a letra b). Como o preço de compra do equipamento é R$36.000,00, temos que o número de anos requeridos para o equipamento pagar-se por si mesmo é n que será a integral definida de $f(x) = 4.000x + 1.000$ de 0 até n, ou seja,

$$\int_0^n f(x)\,dx = 36.000.$$

Resolvendo a integral acima, vem

$$\int_0^n f(x)\,dx = 36.000 \Rightarrow \int_0^n (4.000x + 1.000)\,dx = 36.000$$
$$\Rightarrow (2.000x^2 + 1.000x)\Big|_0^n = 36.000$$
$$\Rightarrow 2.000n^2 + 1.000n = 36.000,$$
$$\Rightarrow 2n^2 + n - 36 = 0.$$

Resolvendo a equação $2n^2 + n - 36 = 0$ pela fórmula de Bhaskara, temos $n = 4$ e $n = -\dfrac{9}{2}$.

Portanto, são necessários 4 anos de uso para o equipamento pagar-se por si mesmo.

Chegou a hora de por em prática o que você aprendeu nesta seção. Resolva os exercicios e tire suas dúvidas com seu tutor. Só prossiga após resolver todos as questões pois tudo que veremos as seguir depende do ceonceito introduzido nesta seção.

Exercícios propostos – 2

1. Calcular a integral $\int_0^3 f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 7 - x, & se\ x < 2 \\ x + 3, & se\ x \geq 2 \end{cases}$.

2. Determinar o valor das seguintes integrais, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos x\right) dx$. b) $\int_0^1 \left(x^3 - 6x + 8\right) dx$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$. d) $\int_0^2 e^x\ dx$.

Integração por substituição

A partir de agora você vai conhecer uma técnica utilizada com o objetivo de desenvolver o cálculo de integrais indefinidas de funções que possuem primitivas. A esta técnica, damos o nome de integração por substituição ou mudança de variável.

Suponha que você tem uma função $g(x)$ e uma outra função f tal que $f\left(g(x)\right)$ esteja definida (f e g estão definidas em intervalos convenientes). Você quer calcular uma integral do tipo

$$\int f\left(g(x)\right) \times g'(x)\ dx\,,$$

Logo,

$$\int f\left(g(x)\right) \times g'(x)\ dx = F\left(g(x)\right) + C. \qquad (1)$$

Fazendo $u = g(x) \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\ \ dx$ e substituindo na equação (1), vem

$$\int f\left(g(x)\right) \times g'(x)\ dx = \int f(u)\ du = F(u) + C.$$

Vejamos agora alguns exemplos de como determinar a integral indefinida de uma função, aplicando a técnica da mudança de variável ou substituição e usando a tabela acima.

Exemplo 7.22 *Calcular a integral*

$$\int \left(x^2+5\right)^3 \times\ 2\,x\ dx\,.$$

Resolução: Fazendo a substituição de $x^2 + 5$ por u na integral dada, ou seja, $u = x^2 + 5$, vem

$$u = x^2+5 \ \Rightarrow\ \frac{du}{dx} = 2\,x+0 = 2\,x\ \Rightarrow du\ = 2\,x\ dx\,.$$

Agora, vamos em $\int \left(x^2+5\right)^3 \times\ 2\,x\ dx$, substituímos $x^2 + 5$ por u e $2\,x\ dx$ por du e temos:

$$\int \left(x^2+5\right)^3 \ \times\ 2\,x\ dx = \int u^3\ du = \frac{u^4}{4} + C\,,$$

onde utilizamos a fórmula (ii) da tabela de integrais.

Como,

$$u = x^2+5\ \Rightarrow\ \frac{u^4}{4}+C = \frac{\left(x^2+5\right)^4}{4} +\ C\,.$$

Portanto,

$$\int \left(x^2\ +\ 5\right)^3\ .\,2\,x\ dx = \frac{\left(x^2\ +\ 5\right)^4}{4}\ +\ C\,.$$

Exemplo 7.23 *Calcular:*

$$\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3}\,.$$

Resolução: Fazendo a substituição de $1 + x^3$ por u na integral dada, ou $u = 1 + x^3$, vem:

$$u\ =\ 1\ +\ x^3\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}\ =\ 0\ +\ 3\,x^2\ =\ 3\,x^2\ \Rightarrow du = 3\,x^2\ dx\,.$$

Agora, vamos em $\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3}$, substituímos $u = 1 + x^3$ por u e

$3\,x^2\,dx$ por du e temos:

$$\int \frac{3\,x^2\,dx}{1+x^3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C\,.$$

(Pela fórmula (iii) da tabela de integrais).

Como

$$u = 1+x^3 \;\Rightarrow\; \ln|u| + C = \ln\left|1+x^3\right| + C\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{3\,x^2\,dx}{1+x^3} = \ln\left|1+x^3\right| + C\,.$$

Exemplo 7.24 *Calcular:*

$$\int \frac{dx}{16+9x^2}\,.$$

Resolução. Na integral dada temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+3^2x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2}$$

aqui $a = 4$ e $u = 3x$.

Assim,

$$u = 3x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 3 \;\Rightarrow\; du = 3dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{3}\,du\,.$$

Agora, vamos à integral dada $\int \frac{dx}{16+9x^2}$, substituímos $3x$ por u e dx por $\frac{1}{3}\,du$ e temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+\left(3x\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}\,du}{4^2+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\; arc\ \text{tg}\frac{u}{4} + C$$

$$= \frac{1}{12}\; arc\ tg\ \frac{u}{4} + C\,.$$

(Pela fórmula (xvi) da tabela de integrais).

Como:

$$u = 3x \Rightarrow \frac{1}{12} arctg \frac{u}{4} + C = \frac{1}{12} arctg \frac{3x}{4} + C .$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{16 + 9x^2} = \frac{1}{12} arctg \frac{3x}{4} + C .$$

Exercícios propostos – 3

- Calcular as seguintes integrais abaixo:

1) $\int \frac{4}{(7-5x)^3} \, dx$.

2) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$.

3) $\int \cos(7t - \pi) \, dt$.

4) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4} \, dx$.

5) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \ \operatorname{sen} x \, dx$.

7) $\int_1^4 \frac{\ln t^5}{t} \, dt$.

8) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$.

Integração por partes

Na seção anterior, estudamos como calcular integrais usando o método da substituição. Mas, existem algumas integrais, tais como: $\int \ln x \, dx$, $\int x e^x dx$, $\int x^3 \cos x \, dx$, etc., que não podem ser resolvidas aplicando o método da substituição. Necessitamos de alguns conhecimentos a mais. Neste caso, iniciaremos apresentando a técnica de *integração por partes*.

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis num intervalo (a,b).

Então, podemos escrever:

$$(uv)' = uv' + vu',$$

ou seja,

$$vu' = (uv)' - uv'.$$

Integrando os dois membros da igualdade acima, temos:

$$\int_a^b vu'dv = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b uv'dx,$$

ou,

$$\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv.$$

E para a integral indefinida tem-se

$$\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv,$$

ou simplesmente,

$$\int vdu = uv - \int udv. \tag{2}$$

A expressão (2) é conhecida como a fórmula de *integração por partes*. Quando aplicarmos esta fórmula para resolver a integral $\int f(x)dx$, devemos separar o integrando dado em duas partes, uma sendo u e a outra, juntamente com dx, sendo dv. Por essa razão o cálculo de integral utilizando a fórmula (2) é chamado *integração por partes*. Para escolher u e dv, devemos lembrar que:

(i) a parte escolhida como dv, deve ser facilmente integrável;
(ii) $\int v\,du$ deve ser mais simples que $\int u\,dv$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos:

Exemplo 7.25 *Calcular a integral:*

$$\int xe^x dx.$$

Resolução: Sejam $u = x$ e $dv = e^x dx$. Assim, teremos $du = dx$ e $v = e^x$. Aplicando a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, obtemos

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 7.26 *Calcular a integral:*

$$\int \ln x \, dx.$$

Resolução: Sejam $u = \ln x$ e $dv = dx$. Assim, teremos $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = x$. Aplicando a fórmula (2), obtemos:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - x + c.$$

Exemplo 7.27 *Encontre:*

$$\int arc \operatorname{tg} x \, dx.$$

Resolução: Sejam $u = arc \operatorname{tg} x$ e $dv = dx$. Assim, teremos, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ e $v = x$. Logo,

$$\int arc \operatorname{tg} x \, dx = x \, arc \operatorname{tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Para calcular a integral $\int \frac{x}{1+x^2} dx$, utilizamos a substituição $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$, então,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C$$
$$= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c, \text{ pois } 1 + x^2 \text{ é sempre positivo.}$$

Portanto,

$$\int arc \operatorname{tg} x \, dx = x \, arc \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

Exemplo 7.28 *Calcular:*

$$\int x \ln x \, dx.$$

Resolução: Sejam $u = \ln x$ e $dv = x\,dx$. Assim, teremos $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{1}{2} x^2$. Logo,

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Exemplo 7.29 *Calcular:*

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Resolução: Sejam $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Assim, teremos $du = e^x dx$ e $v = -\cos x$. Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx. \qquad (3)$$

Novamente, considerando, $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x\, dx$, temos $d\bar{u} = e^x dx$ e $\bar{v} = \operatorname{sen} x$. De (2), obtemos:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\,. \qquad (4)$$

De (3) e (4), segue que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

Exemplo 7.30 *Determine:*

$$\int \sec^3 x\, dx.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \sec^2 x \sec x\, dx.$$

Fazendo $u = \sec x$, temos $du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$ e $dv = \sec^2 x\, dx$ e $v = \operatorname{tg} x$. Aplicando a fórmula (2), obtemos:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx.\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos:

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\ dx\,.$$

Pela tabela de integração sabemos que

$$\int \sec x\ dx = \ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + C\,.$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + C.$$

Exercícios propostos – 4

- Calcular as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

1) $\int e^x (x+1)^2\,dx$.

2) $\int x^2 \ln x\,dx$.

3) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$.

4) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

5) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

6) $\int x\,e^{-x}\,dx$.

Integrais impróprias

Sabemos que toda função contínua num intervalo fechado é integrável nesse intervalo, ou seja, se f é uma função contínua em $[a,b]$ então existe $\int_a^b f(x)dx$. Quando f não está definida num dos extremos do intervalo $[a,b]$, digamos em a, mas existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, podemos definir $\int_a^b f(x)dx$ como sendo o limite $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$ quando este limite existe. Para os outros casos a situação é análoga. Nestes casos as integrais são conhecidas como *integrais impróprias*. A seguir apresentaremos a definição e o procedimento para calcular integrais impróprias. Analisaremos cada caso em separado.

(i) Dado $f:(a,b] \to \mathbb{R}$, se existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx\,, \quad a < t < b\,,$$

quando este limite existe. Caso não exista este limite diremos que a integral $\int_a^b f(x)dx$ não existe, ou não converge.

Graficamente,

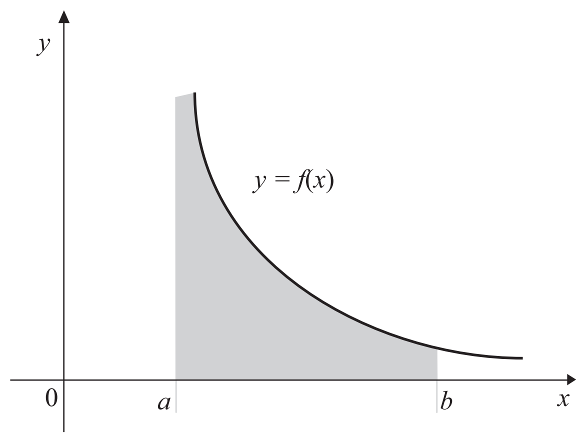


Figura 7.5

(ii) Dado $f:[a,b) \to \mathbb{R}$, se existe $\int_a^t f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx\,, \quad a < t < b\,,$$

quando este limite existe. Caso não exista este limite diremos que $\int_a^b f(x)dx$ não existe, ou não converge.

Graficamente,

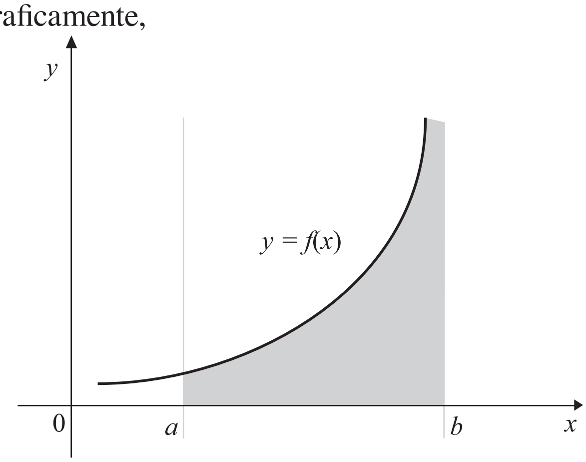


Figura 7.6

(iii) Dado $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, escrevemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ , \quad a<c<b\,,$$

quando as duas integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (i) e (ii), respectivamente.

(iv) Quando $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é descontínua em algum $c\in(a,b)$ e não existe algum limite lateral perto de c, então escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ , \quad a<c<b\,,$$

sempre que as integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (ii) e (i) respectivamente.

(v) Dada $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$, se existir $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t\in(-\infty,b)$, definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx\ , \quad -\infty<t<b\,,$$

quando este limite existe. Se este limite não existir, diremos que a integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ não existe ou não converge.

(vi) Dada $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, se existir $\int_a^t f(x)dx$ para todo $t\in[a,\infty)$, definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx\ , \quad a<t<\infty\,,$$

quando este limite existe. Se este limite não existir diremos que a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ não existe ou não converge.

(vii) Dada $f:\left(-\infty,\infty\right)\to\mathbb{R}$, escrevemos,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx\ , \quad -\infty<c<\infty\,,$$

quando as duas integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (v) e (vi) respectivamente.

Quando uma integral imprópria existe, ou seja, o limite envolvido tem valor finito, dizemos que ela é *convergente*. Caso contrário dizemos que ela é *divergente*.

A seguir apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 7.31 *Calcular, se existir:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Resolução: Observemos que a função $f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ não está definida no ponto $x = 1$. Neste caso calculamos o limite, usando (ii)

$$\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Fazendo $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$, pelo método de substituição, vem

$$\int (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\int u^{-\frac{1}{2}} du = -2u^{1/2},$$

ou seja,

$$\int_0^t (1-x)^{-1/2} dx = -2(1-x)^{1/2}\Big|_0^t$$

$$= -2\left[(1-t)^{1/2} - 1\right].$$

Logo,

$$\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} -2\left[(1-t)^{1/2} - 1\right]$$

$$= -2[0-1] = 2$$

Portanto, a integral converge e temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Exemplo 7.32 *Calcular, se existir:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Resolução: Observemos que a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ não está definida no ponto $x=0$. Neste caso, calculamos o limite, usando (i)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{t\to 0^+} \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right)\\ &= \infty\,.\end{aligned}$$

Portanto, a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge ou não existe.

Exemplo 7.33 *Calcular, se existir:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx.$$

Resolução: Observemos que $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$ não está definida em $x=\dfrac{\pi}{2}$. Assim, calculamos o limite, usando (i)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_0^t \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\operatorname{sen} x\right)^{-1/2}\cos x\,dx\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[-\left.\frac{\left(1-\operatorname{sen} x\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^t\right]\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[-2\left(1-\operatorname{sen} x\right)^{1/2}\Big|_0^t\right]\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[-2\left(1-\operatorname{sen} t\right)^{1/2}+2\left(1-\operatorname{sen} 0\right)^{1/2}\right]\\ &= \left[-2\left(1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}+2\right]\\ &= \left[-2(1-1)^{1/2}+2\right]=2\end{aligned}$$

Logo, a integral converge e temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx = 2\,.$$

Exemplo 7.34 *Determinar, se existir:*

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-2}.$$

Resolução: Observemos que $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ não é contínua em $x = 2$. Assim,

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-2} = \int_0^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^4 \frac{dx}{x-2},$$

se as integrais do segundo membro convergirem.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{x-2} + \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 \frac{dx}{x-2} \\
&= \lim_{t\to 2^-} \ln|x-2|\Big|_0^t + \lim_{t\to 2^+} \ln|x-2|\Big|_t^4 \\
&= \lim_{t\to 2^-}\Big(\ln|t-2| - \ln|-2|\Big) + \lim_{t\to 2^+}\Big(\ln|2| - \ln|t-2|\Big).
\end{aligned}$$

Observamos que calculando o primeiro limite obtemos o resultado ∞, logo, podemos concluir que a integral proposta não existe, ou seja, a integral é divergente.

Exemplo 7.35 *Determinar, se existir:*

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

Resolução: Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to -\infty}\int_t^0 e^x dx &= \lim_{t\to -\infty} e^x\Big|_t^0 \quad (-\infty < t < 0) \\
&= \lim_{t\to -\infty}\left(1 - e^t\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, a integral converge e temos

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

Exemplo 7.36 *Determinar, se existir:*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Resolução: Calculamos

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_1^t \qquad (1 < t < \infty)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(2\sqrt{t}-2\right) = \infty .$$

Portanto, a integral diverge.

Exemplo 7.37 *Calcular, se existir:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Resolução. Escrevemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

e calculamos os limites:

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} arc\ \mathrm{tg}\ x\Big|_t^0 + \lim_{t\to\infty} arc\ \mathrm{tg}\ x\Big|_0^t$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Portanto, a integral converge e temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi .$$

Exercícios propostos – 5

- Calcular, se existirem, as seguintes integrais impróprias, indicar se converge ou diverge.

1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$. 2) $\int_0^1 x \ln x\, dx$.

3) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4dx}{x^2+16}$. 5) $\int_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2}$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados neste capítulo consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.
- SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/supeior/superior.htm
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Nesta Unidade tratamos o conceito de função primitiva, e com isso compreendeu também a definição de integral indefinida e suas propriedades. Aprendeu a calcular o valor de algumas integrais imediatas, bem como a calcular uma integral definida aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo. Você também aprendeu algumas técnicas de cálculo de integrais e de integrais impróprias.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) $F(x) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 + 2x + K$.

b) $F(x) = -\,4\,x^{-\frac{1}{4}} + K$.

c) $F(x) = -\,2\,x^{-\frac{1}{2}} + K$.

d) $F(x) = \ln\,(x-1) + K$.

e) $F(x) = \dfrac{e^{4x}}{4} + K$.

2) a) $F(x) = -2\cos\,x + \text{sen}\,x - \dfrac{x^3}{6} + K$ e $K = \dfrac{\pi^3}{384}$.

b) $F(x) = 3\,x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{x^2}{2} + K$ e $K = -3$.

c) $F(x) = \sec\,x + \text{sen}\,x + K$ e $K = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $F(x) = \dfrac{3}{7}\,x^{\frac{7}{3}} + e^x + K$ e $K = 1$.

e) $F(x) = \text{sen}\,x + \cos x + K$ e $K = -1$.

3) a) $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{8}{3}x^3 + 16x + C$.

b) $\ln\,x + 6\,x^{\frac{1}{3}} + C$.

c) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{3\,x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{3}{x} + C$.

d) $4x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + C$.

e) $-\dfrac{1}{2x^2} + C$.

- **Exercícios propostos – 2**

1) $\frac{33}{2}$.

2) a) $\frac{\pi^2}{8}+1$; b) $\frac{21}{4}$; c) 1; d) e^2-1.

- **Exercícios propostos – 3**

1) $\frac{1}{5(7-5x)^2}+C$. 2) $\frac{-1}{x}+C$.

3) $\frac{1}{7}\operatorname{sen}(7t-\pi)+C$. 4) $\frac{-1}{6}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

5) $\frac{\sqrt{3}}{3}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{3}}+C$. 6) $\frac{1}{4}$.

7) $\frac{5}{2}\times(\ln 4)^2$. 8) $\sqrt{10}-1$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) $e^x x^2+e^x+C$.

2) $\frac{1}{3}x^3\ln|x|-\frac{x^3}{9}+C$.

3) $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln|x|-\frac{4x^{3/2}}{9}+C$.

4) $-\frac{1}{2}\cos x\operatorname{sen} x+\frac{x}{2}+C$.

5) $\frac{1}{2}\left(\ln|x|\right)^2+C$.

6) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$.

Exercícios propostos – 5

1) 2. 2) $-\frac{1}{4}$. 3) $\frac{\pi}{2}$. 4) π. 5) ∞.

UNIDADE

8

Aplicações da Integral

Aplicações da Integral

Objetivo

Nesta unidade você vai aplicar a integral definida em cálculo de área de uma região plana limitada e fechada; calcular o volume de sólido de revolução; e calcular o comprimento de arco.

Aplicações da Integral

Cálculo de área de uma região limitada e fechada

A partir deste momento passaremos a examinar as aplicações do conteúdo estudado na Unidade anterior.

Nesta seção vamos abordar uma das aplicações da integral definida. Começaremos com a aplicação que motivou a definição deste importante conceito matemático – *a determinação da área de uma região R do plano, que estudamos na Unidade 7.*

Vamos considerar sempre a região que está entre os gráficos de duas funções. Suponhamos então que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e que $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$. Então, a área da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$, à esquerda pela reta $x = a$ e à direita pela reta $x = b$, conforme ilustra a figura abaixo, é

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x) \big)\, dx \,.$$

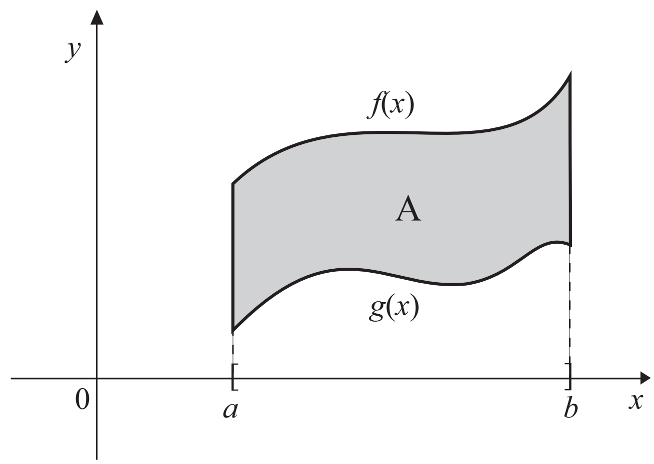


Figura 8.1

Quando a região não for tão simples como a da figura 8.1, é necessária uma reflexão cuidadosa para determinar o integrando e os limites de integração. Segue abaixo um procedimento sistemático que podemos seguir para estabelecer a fórmula, utilizando os seguintes passos.

Passo 1. Você faz o gráfico da região para determinar qual curva limita acima e qual limita abaixo.

Passo 2. Você determina os limites de integração. Os limites a e b serão as abscissas x dos dois pontos de interseção das curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Para tanto iguala-se $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, faz $f(x) = g(x)$ e resolve-se a equação resultante em relação a x.

Passo 3. Calcule a integral definida para encontrar a área entre as duas curvas.

Observação *Consideremos agora a área da figura plana limitada pelo gráfico de* $f(x)$, *pelas retas* $x = a$ e $x = b$ *e o eixo x, onde* $f(x)$ *é uma função contínua sendo* $f(x) \leq 0$, *para todo x em* $[a, b]$, *conforme figura a seguir:*

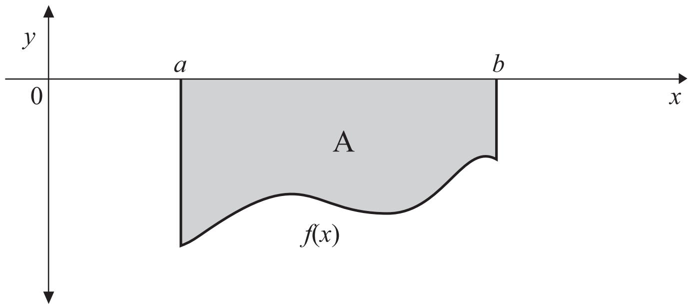


Figura 8.2

O cálculo da área A é dado por:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|,$$

ou seja: basta você calcular a integral definida e considerar o módulo ou valor absoluto da integral definida encontrada.

Apresentaremos alguns exemplos de cálculo de área entre duas curvas:

Exemplo 8.1 *Determinar a área da região limitada entre as curvas:*

$$y = f(x) = x + 6 \text{ e } y = g(x) = x^2.$$

Resolução: Utilizando o procedimento sistemático apresentado acima, temos os seguintes passos:

Passo 1. Esboço da região

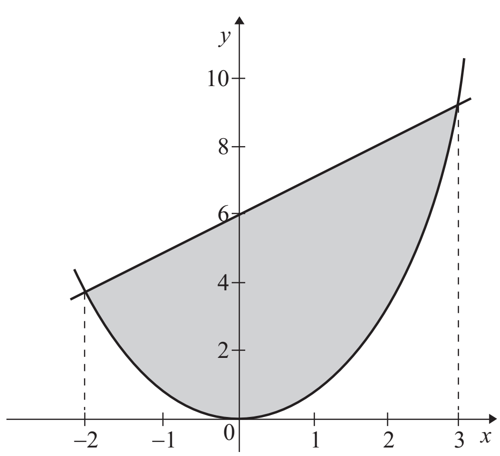


Figura 8.3

Passo 2. Para encontrar os limites de integração ,fazemos $f(x) = g(x)$, isto é, $x + 6 = x^2$ ou $x^2 = x + 6$, que fornece $x^2 - x - 6 = 0$. Pela fórmula de Bhaskara encontramos as raízes da equação acima, $x = -2$ e $x = 3$, que serão os limites de integração. Observe, pelo gráfico acima, que $x + 6 \geq x^2$, para todo x em $[-2,\ 3]$.

Passo 3. Calculando a área da região limitada por: $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2,\ 3]$ temos :

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[\left(x + 6 \right) - x^2 \right] dx = \int_{-2}^{3} \left(x + 6 - x^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} + 6 \times 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6 \times (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 3^2 \right) - \left(\frac{4}{2} - 12 - \frac{-8}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9 \right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 9 \right) - \left(-10 + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{9 + 18}{2} \right) - \left(\frac{-30 + 8}{3} \right)$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{-22}{3} = \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{81 + 44}{6} = \frac{125}{6} \ u.a.$$

Portanto, a área limitada por $y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2,\ 3]$ é $\dfrac{125}{6}$ unidades de área.

Exemplo 8.2 *Determinar a área da região limitada por*

$$y = f(x) = 4 \text{ e } y = g(x) = x^2 .$$

Resolução: Utilizando o procedimento sistemático apresentado acima, temos os seguintes passos:

Passo 1. Esboço da região:

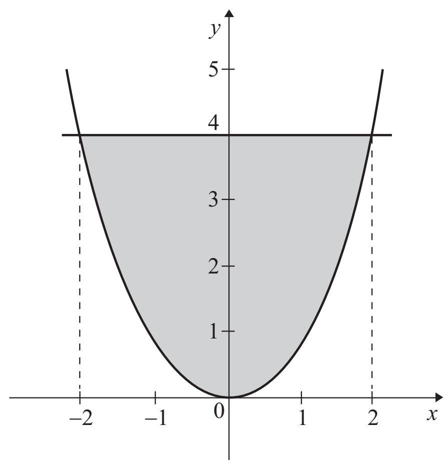


Figura 8.4

Passo 2. Para encontrar os limites de integração fazendo $f(x) = g(x)$, temos, $4 = x^2$ ou $x^2 = 4$. Logo, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, ou seja, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Assim, $a = -2$ e $b = 2$.

Passo 3. A área da região limitada por $y = f(x) = 4$ e $y = g(x) = x^2$, em $[-2,\ 2]$ será:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\
&= \left(4 \times 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \times (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) \\
&= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) \\
&= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - 2 \times \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} \\
&= \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3}\ u.a.
\end{aligned}
$$

Portanto, a área limitada por $y = f(x) = 4$ e $y = g(x) = x^2$ em $[-2,\ 2]$ é $\frac{32}{3}$ unidades de área.

Exemplo 8.3 *Determinar a área da região limitada por*

$$y = f(x) = 8 - x^2 \;\text{ e }\; g(x) = x^2 .$$

Resolução: Temos os seguintes passos:

Passo 1. Esboço da região:

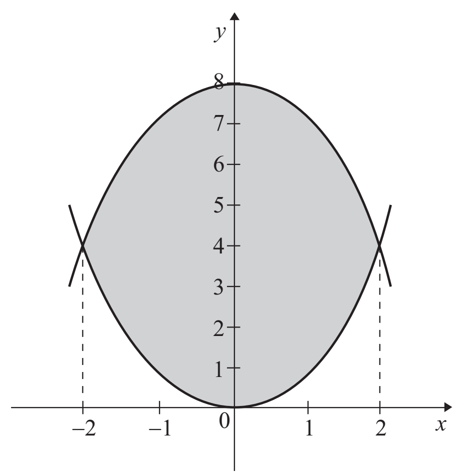


Figura 8.5

Passo 2. Para encontrar os limites de integração, fazemos $f(x) = g(x)$, isto é, $8 - x^2 = x^2$, que fornece $8 = 2\,x^2$ e $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Assim, $a = -2$ e $b = 2$.

Passo 3. A área da região limitada por $y = f(x) = 8 - x^2$ e $g(x) = x^2$ será:

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \;=\; \int_{-2}^{2} \left(8 - x^2 - x^2\right)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8 - 2\,x^2\right)dx \;= \left(8\,x - 2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(8 \times 2 - 2 \times \frac{2^3}{3}\right) - \left(8 \times (-2) - 2 \times \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(16 - 2 \times \frac{8}{3}\right) - \left(-16 - 2 \times \frac{-8}{3}\right)$$

$$= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = 32 - 2 \times \frac{16}{3}$$

$$= 32 - \frac{32}{3} = \frac{96 - 32}{3} = \frac{64}{3} \ u.a.$$

Portanto, a área limitada por $y = f(x) = 8 - x^2$ e $g(x) = x^2$ em $[-2,\ 2]$ é $\frac{64}{3}$ unidades de área.

Exemplo 8.4 *Determinar a área limitada pela curva* $y = f(x) = x^2 - 5x$*, o eixo x e as retas* $x = 1$ e $x = 3$.

Resolução: Temos os seguintes passos:

Passo 1. Esboço da região.

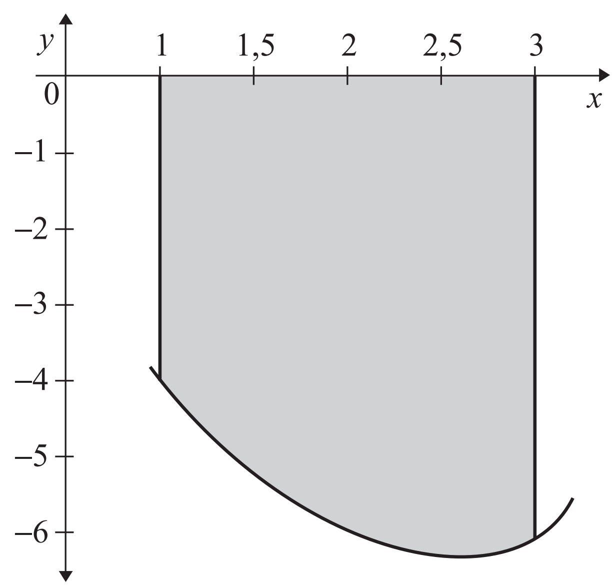


Figura 8.6

Passo 2. Os limites de integração são $a = 1$ e $b = 3$.

Passo 3. A área limitada pela curva $y = f(x) = x^2 - 5x$ o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 3$, será:

$$A = \left|\int_1^3 \left(x^2 - 5x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3\right|$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3} - 5 \times \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 5 \times \frac{1^2}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{27}{3} - 5 \times \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 5 \times \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(9 - \frac{45}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{18 - 45}{2}\right) - \left(\frac{2 - 15}{6}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-27}{2}\right) - \left(\frac{-13}{6}\right)\right| = \left|\frac{-27}{2} + \frac{13}{6}\right|$$

$$= \left|\frac{-81 + 13}{6}\right| = \left|\frac{-68}{6}\right| = \left|-\frac{34}{3}\right| = \frac{34}{3}\ u.a.$$

Portanto, a área limitada pela curva $y = f(x) = x^2 - 5x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 3$ é $\frac{34}{3}$ unidades de área.

Exemplo 8.5 *Encontrar a área da região limitada pela curva* $y = f(x) = \text{sen}\ x$ *e pelo eixo x de* 0 a 2π.

Resolução: Você tem os seguintes passos:

Passo 1. Esboço da região:

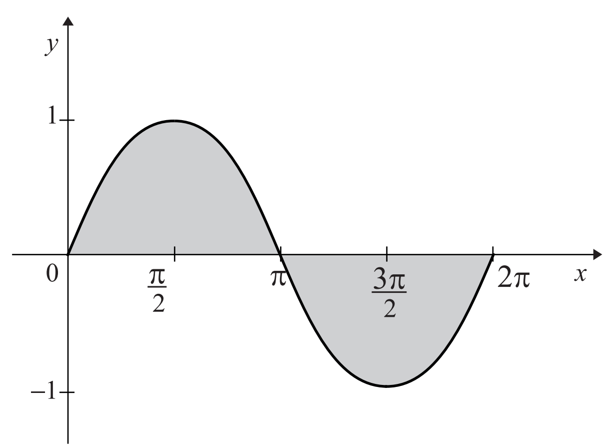


Figura 8.7

Passo 2. Para determinar os limites de integração, temos, pelo gráfico acima, no intervalo $[0\,,\,\pi]$, $f(x) = \text{sen}\,x \geq 0$ e no intervalo $[\pi\,,\,2\pi]$, $f(x) = \text{sen}\,x \leq 0$.

Passo 3. A área da região limitada pela curva $f(x) = \text{sen}\,x$, e pelo eixo x de 0 até 2π será:

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\,x\,dx\right| = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \left|-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$= \big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big) + \big|\big(-\cos 2\pi - (-\cos\pi)\big)\big|$$

$$= -(-1)-(-1) + \big|-1-\big(-(-1)\big)\big|$$

$$= 1+1+|-1-1| = 2+|-2| = 2+2 = 4\ u.a.$$

Portanto, a área da região limitada pela curva $f(x) = \text{sen}\,x$ e pelo eixo x de 0 até 2π é 4 unidades de área.

Chegou a hora de por em prática o que você aprendeu nesta seção. Responda os exercicios e caso tenha dúvidas, busque orientação junto ao Sistema de Acompanhamento

Exercícios propostos – 1

1) Calcular a área da região especificada em cada exercício:

a)

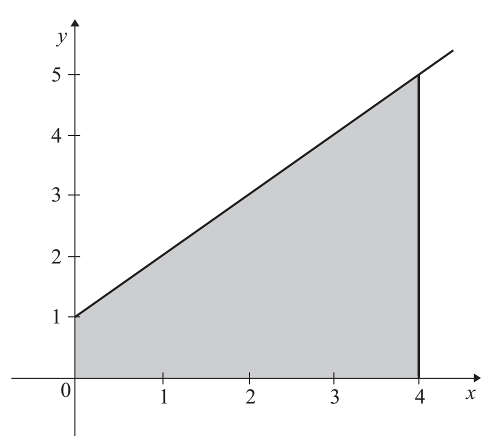


Figura 8.8

Onde $y = f(x) = x + 1$.

b)

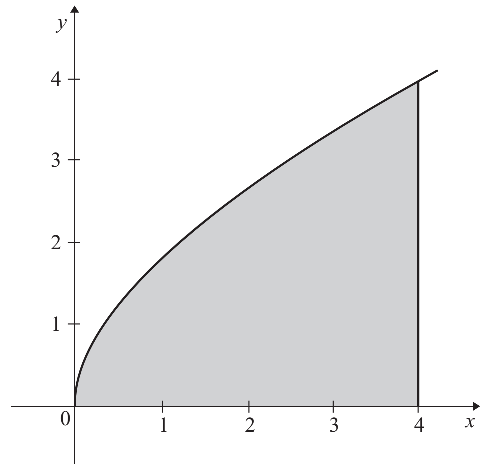


Figura 8.9

Onde $y = f(x) = \sqrt{x}$.

2) Determinar a área da região limitada por: $y = f(x) = x$ e $y = g(x) = x^2 - x$.

3) Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = -x + 1$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 0$.

4) Determinar a área da região limitada por $y = f(x) = x^2$ e $y = g(x) = -x^2 + 4x$.

5) Calcular a área da região limitada por $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$.

Volume de sólido de revolução

O volume de um sólido desempenha um papel importante em muitos problemas nas ciências físicas, tais como, determinação de *centro de massa* e de *momento de inércia*. Como é difícil determinar o volume de um sólido de forma irregular, começaremos com objetos que apresentam formas simples. Incluídos nesta categoria estão os sólidos de revolução.

Um sólido de revolução é gerado pela rotação de uma região do plano, em torno de uma reta chamada *eixo de revolução*, contida no plano.

Seja S o sólido gerado pela rotação da região do plano limitada por $y = f(x)$, o eixo x, $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x. Então o volume V deste sólido é dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$$

Podemos provar a fórmula acima utilizando argumentos semelhantes aos usados para calcular a área de uma região plana e limitada, mas não faremos este estudo. Neste trabalho daremos apenas a fórmula.

Graficamente,

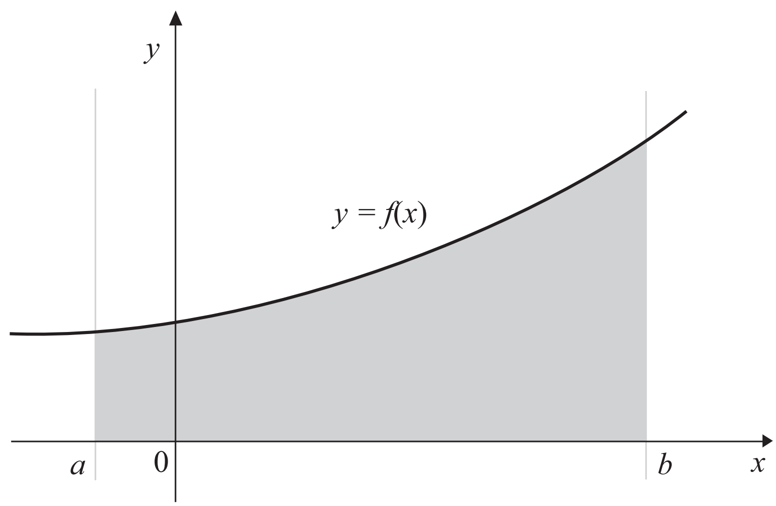


Figura 8.10

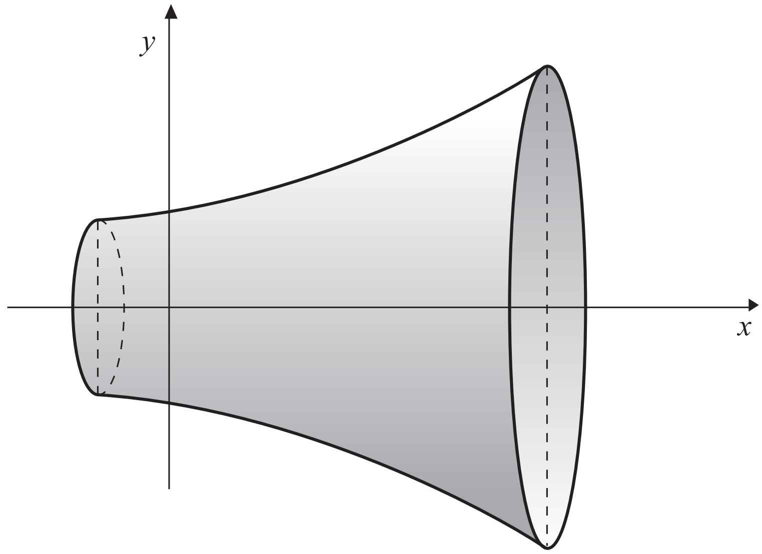


Figura 8.11

Analogamente, quando *o eixo de revolução* é o eixo y e a fronteira da região plana é dada pela curva $x = g(y)$ e o eixo y entre $y = c$ e $y = d$, então o volume V do sólido de revolução é dado por

$$V = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 dy.$$

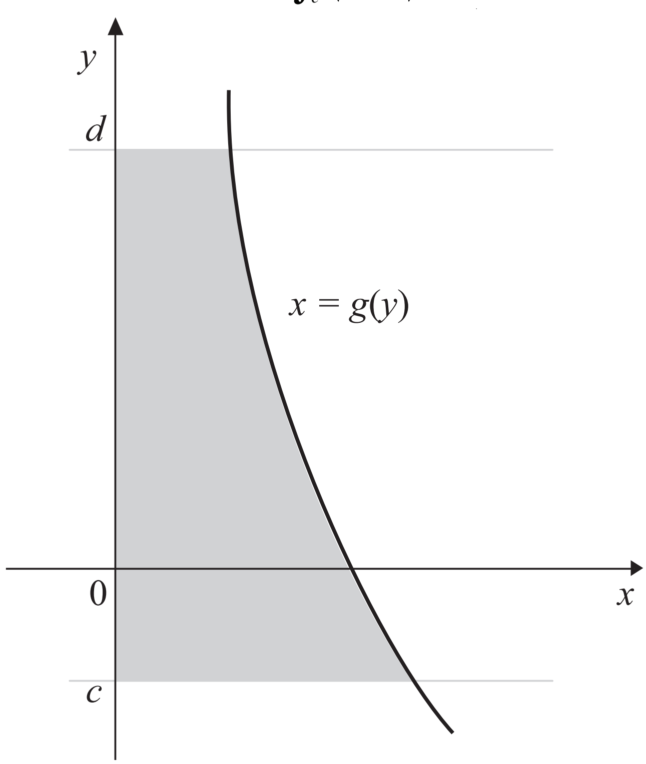


Figura 8.12

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas no intervalo $[a,b]$ e suponhamos que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ é dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 \right] dx.$$

Graficamente:

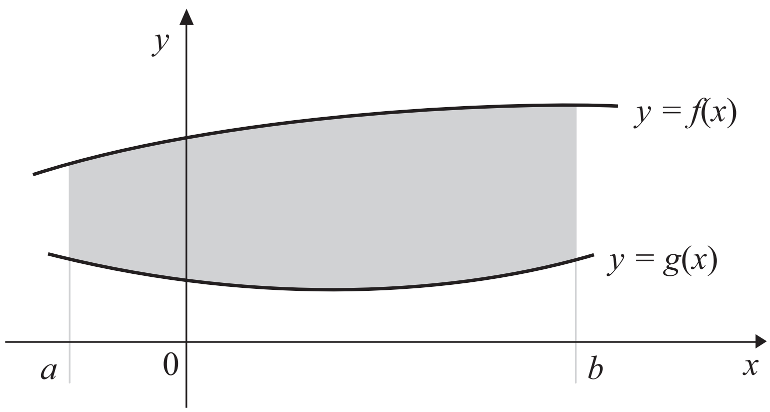


Figura 8.13

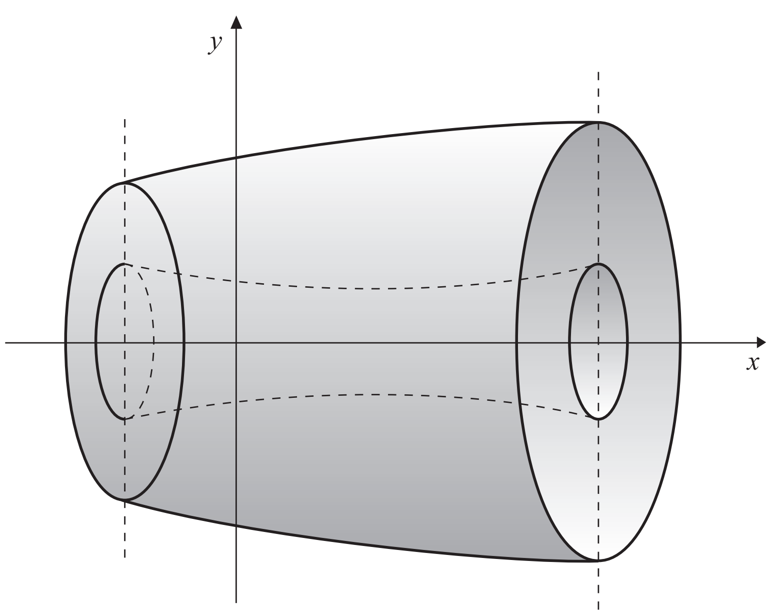


Figura 8.14

Exemplo 8.6 *A região limitada pela curva* $y = x^2$*, o eixo* x *e as retas* $x = 1$ *e* $x = 2$*, sofrem uma rotação em torno do eixo* x*. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.*

Resolução: Inicialmente, construímos o gráfico da curva dada pela figura:

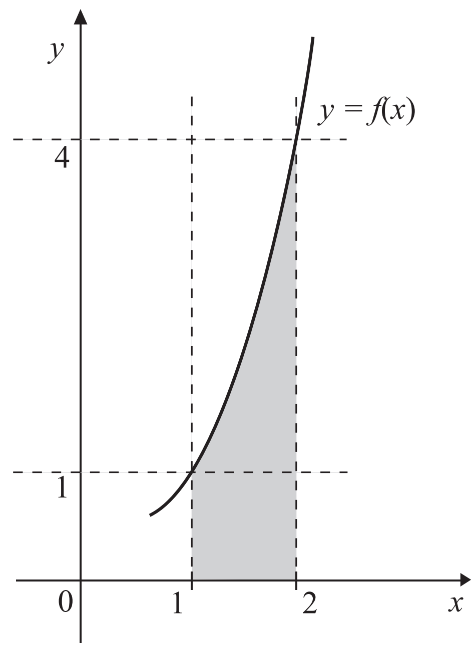


Figura 8.15

Temos:

$$V = \pi \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(32 - 1\right)$$

$$= \frac{31}{5}\pi \text{, unidades de volume } (u.v.).$$

Exemplo 8.7 *Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por* $y = x^3$*,* $y = 0$ *e* $x = 1$ *em torno do eixo* y*.*

Resolução: Inicialmente, construímos o gráfico das curvas dadas

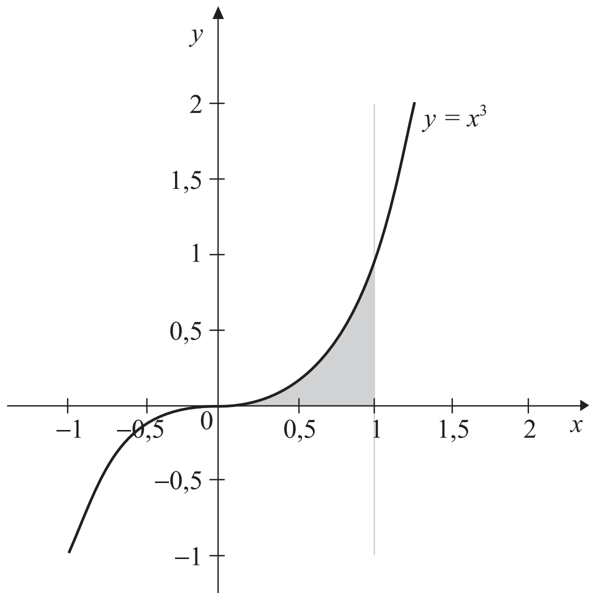


Figura 8.16

De $y = x^3$ temos $x = y^{1/3}$. Logo, o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo y é dado por

$$V = \pi\int_c^d \left(g\left(y\right)\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y^{2/3}dy$$
$$= \frac{3\pi}{5}y^{5/3}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5}\ u.v.$$

Exemplo 8.8 *Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por* $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ *e* $x = 1$ *em torno do eixo* x.

Resolução: Veja a figura abaixo, representando a região:

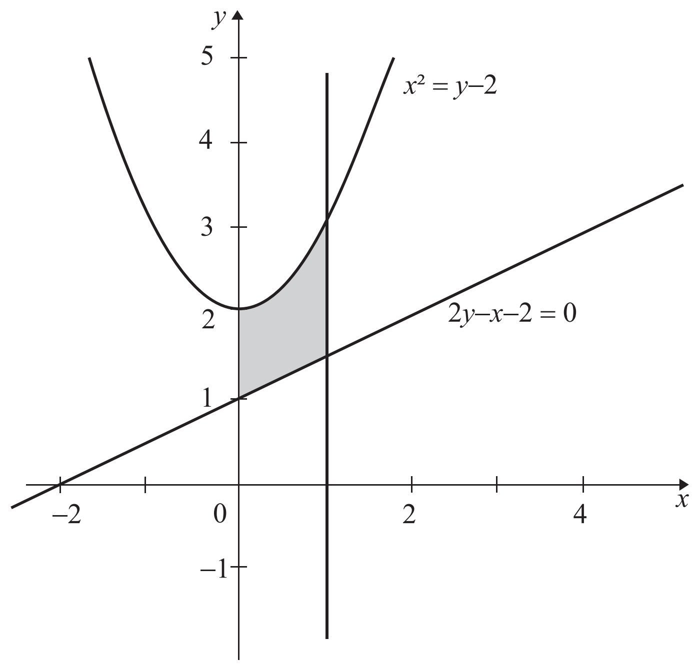


Figura 8.17

(a) Volume do sólido em torno do eixo x. Neste caso, temos

$$V = \pi\int_a^b\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1\left[\left(x^2+2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1\left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 3\right) = \frac{79\pi}{20} \ u.v.$$

Exercícios propostos – 2

1) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, de região limitada por:

a) $y = 2x + 1, \quad x = 0, \quad x = 3$ e $y = 0$.

b) $y = x^2 + 1, \quad x = 1, \quad x = 3$ e $y = 0$.

2) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo y, de região limitada por: $y = \ln x, \quad y = -1, \quad y = 3$ e $x = 0$.

3) Calcule o volume do sólido obtido girando cada região limitada pelas curvas e retas dadas em torno do eixo indicado:

a) $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5$; em torno do eixo dos x.

b) $y = x^2 - 5x + 6,\ y = 0$; em torno do eixo dos x.

c) $y^2 = 2x,\ x = 0,\ y = 0$ e $y = 3$; em torno do eixo dos y.

d) $y = 2x - 1,\ x = 0,\ x = 3$ e $y = 0$; em torno do eixo dos x.

Comprimento de arco

A seguir, apresentaremos o comprimento de arco de uma curva plana em coordenadas cartesianas. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Consideremos o gráfico da função $y = f(x)$.

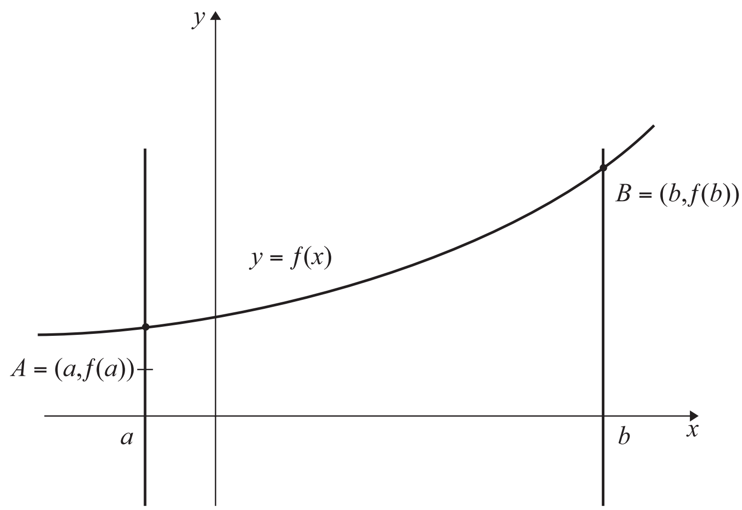


Figura 8.18

Sejam $A\big(a, f(a)\big)$ e $B(b, f(b))$ dois pontos na curva $y = f(x)$. Seja s o comprimento da curva $\overset{\frown}{AB}$ do gráfico da da função $y = f(x)$. Então, s é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

A seguir, apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 8.9 *Determinar o comprimento de arco da curva* $y = \dfrac{x}{2} + 1$, $0 \le x \le 3$.

Resolução: Temos,

$$y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx$$
$$= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{1}{4}}\, dx$$
$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{5}{4}}\, dx = \sqrt{\frac{5}{4}}\, x\Big|_0^3 = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

Portanto, o comprimento de $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, para $0 \le x \le 3$ é dada por $s = \frac{3}{2}\sqrt{5}\ u.c.$

Exemplo 8.10 *Calcule o comprimento do arco da curva* $24xy = x^4 + 48$ *de* $x = 2$ *a* $x = 4$

Resolução: Temos,

$$24xy = x^4 + 48$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{24}x^3 + \frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2}{24} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^4 - 16}{8x^2}.$$

Agora,

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1+\left(\frac{x^4-16}{8x^2}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{1+\frac{1}{64x^4}\left(x^8 + 256 - 32x^4\right)}\, dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{x^8 + 32x^4 + 256}{64x^4}}\, dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{(x^4+16)^2}{(32x^2)^2}}\, dx = \int_2^4 \frac{\sqrt{(x^4+16)^2}}{\sqrt{(32x^2)^2}}\, dx$$
$$= \int_2^4 \left(\frac{x^4+16}{8x^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^2 + 16x^{-2}\right) dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{16}{x}\right]\Bigg|_2^4$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} + 8\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{56}{3} + 4\right] = \frac{17}{6}\ u.v.$$

Vamos verificar se você compreendeu estas importantes aplicações da integral definida e para isto tente resolver os exercícios propostos a seguir. Se tiver dúvidas, procure esclarecê-las antes de seguir adiante.

Exercícios propostos – 3

- Determine o comprimento das curvas dadas por:

1) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}\ln x, \quad 2 \le x \le 4.$

2) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ de $x = \dfrac{1}{4}$ a $x = \dfrac{3}{4}$.

3) $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

4) $y = 1 - \ln\left(\text{sen } x\right)$ de $x = \dfrac{\pi}{6}$ a $x = \dfrac{\pi}{4}$.

5) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ de $x = 0$ a $x = 1$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados neste capítulo consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Vol. 1.

- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/superior.htm
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Nesta Unidade você estudou aplicações da integral definida em cálculo da área de uma região plana e limitada, estudou aplicações da integral definida em cálculo de volume do sólido de revolução, e no comprimento de arco de uma curva utilizando o sistema de coordenadas cartesianas.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) 12 unidades de área. b) $\frac{16}{3}$ unidades de área.
2) $\frac{4}{3}$ unidades de área.
3) 4 unidades de área.
4) $\frac{8}{3}$ unidades de área.
5) 2 unidades de área.

- **Exercícios propostos – 2**

1) a) $57\pi\ u.v.$; b) $\frac{1016}{15}\pi\ u.v.$
2) $\frac{\pi}{2}\left(e^6 - \frac{1}{e^2}\right) u.v.$;
3) a) $2500\pi\ u.v.$ b) $\frac{\pi}{30}\ u.v.$
   c) $\frac{243}{20}\pi\ u.v.$ d) $21\pi\ u.v.$

- **Exercícios propostos – 3**

1) $6+\frac{1}{4}\ln 2 = 6{,}173\,u.c.$
2) $\ln\left(\frac{21}{5}\right) - \frac{1}{2}\,u.c.$ 3) $\frac{123}{32}\,u.c.$
4) $\frac{1}{2}\ln 2 - \ln\left|2+\sqrt{2}\right| + \ln\left|2+\sqrt{3}\right|\,u.c.$
5) $\frac{1}{2e}\left(e^2 - 1\right) u.c.$

UNIDADE

9

Funções de Várias Variáveis, Derivadas Parciais e Integral Dupla

Funções de Várias Variáveis, Derivadas Parciais e Integral Dupla

Objetivo

Nesta unidade você vai compreender a noção de funções de duas e três variáveis; descrever limite e continuidade de funções de duas variáveis; calcular derivadas parciais de funções de duas ou mais variáveis; aplicar derivadas parciais no cálculo de máximos e mínimos de funções de duas variáveis; e entender a noção de integral dupla.

Funções de Várias Variáveis, Derivadas Parciais e Integral Dupla

Funções de várias variáveis

A partir de agora, passaremos a nos preocupar com noções básicas de funções de duas ou mais variáveis, bem como derivada parcial e integral dupla. Leia com atenção, anote suas dúvidas, procure resolver os exercícios propostos e caso encontre dificuldades, busque orientações junto ao Sistema de Acompanhamento.

Até agora, você estudou funções de uma variável em várias situações práticas, no entanto, a formulação de um problema resulta em modelo matemático que envolve uma função de duas ou mais variáveis. Por exemplo: suponha que uma companhia ABC determina que os lucros são R\$60,00, R\$80,00 e R\$90,00, para três tipos de produtos que ela produz. Seja x, y e z o número de lembranças do tipo A, B e C que devem ser produzidas. O lucro da companhia é dado então por

$$P = 60x + 80y + 90z$$

e P é uma função de três variáveis x, y e z.

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Chama-se função de D em $\mathbb{R}^2$, toda relação $\mathbb{R}^2 = \left\{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\right\}$ que associa a cada par ordenado (x, y) pertencente a D um único número real indicado por $f(x, y)$. O conjunto D é chamado **domínio** da função e $f(x, y)$ é chamado de **imagem** de (x, y) ou valor de f em (x, y). Em outras palavras: uma função real de duas variáveis, consiste em:

1. Um conjunto A de pares ordenados de números reais (x, y), chamado de domínio da função;

2. Uma regra que associa a cada par ordenado no domínio de f um único número real, denotado por $z = f(x,y)$.

As variáveis x e y são chamadas **variáveis independentes**, e a variável z, que depende dos valores de x e y é chamada de **variável dependente**. Como no caso de uma função real de uma variável, o número $z = f(x,y)$ é chamado de valor de f no ponto (x,y).

Exemplo 9.1 *Seja f uma função definida por $f(x,y) = x^2 + xy + 3$. Calcule $f(1,0), f(2,1)$ e $f(1,4)$.*

Resolução: Temos que

$$f(1,0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 3 = 1 + 3 = 4$$
$$f(2,1) = 2^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$$
$$f(1,4) = 1^2 + 1 \cdot 4 + 3 = 1 + 4 + 3 = 8.$$

Observação *Quando não for especificado o domínio de uma função, convenciona-se que o mesmo é o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de modo que a imagem $f(x,y)$ seja um número real. Além disso, se a função for decorrente de uma situação prática, os valores de x e y devem assumir valores compatíveis com as características de variáveis consideradas (por exemplo, se x e y forem quantidades, elas não podem ser negativas). Por exemplo, o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{y+x}$ é $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y + x \geq 0\right\}$. E para a função $f(x,y) = \dfrac{x+y}{3x-y}$ é $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x \neq y\right\}$, pois a divisão por zero não é possível.*

Exemplo 9.2 *Determine o domínio de cada uma das funções:*

a) $f(x,y) = x^2 + y$;

b) $f(x,y) = \dfrac{2y}{y-x}$;

c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Resolução:

a) $f(x,y)$ está definida para todos os valores reais de x e y de forma que o domínio da função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) no plano xy, ou seja, $\mathbb{R}^2$.

Graficamente:

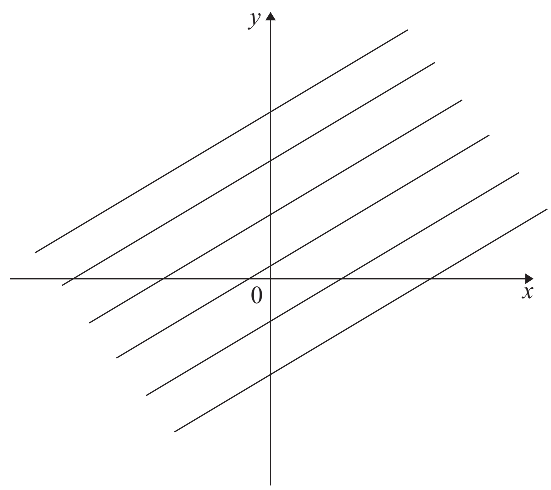


Figura 9.1: Gráfico do domínio da função $f(x, y) = x^2 + y$

b) $f(x, y)$ está definida para todo x e y reais, menos $x \neq y$, pois quando $x = y$ estamos dividindo por zero, que não é permitido. Então,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \neq y\right\}.$$

Graficamente:

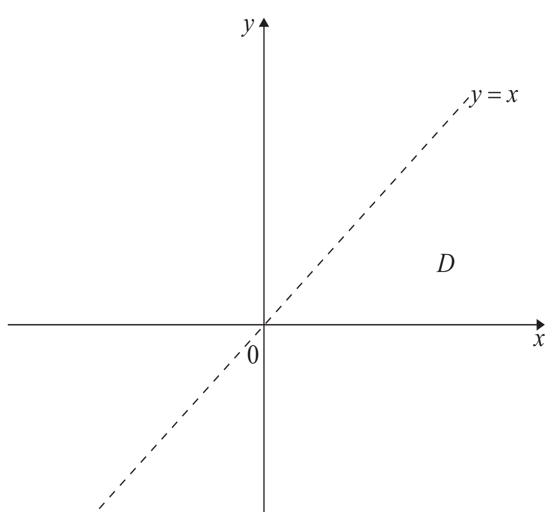


Figura 9.2: Gráfico do domínio da função $f(x, y) = \dfrac{2y}{y - x}$

c) Neste caso, é necessário que $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja, $x^2 + y^2 \leq 4$. Logo,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Graficamente:

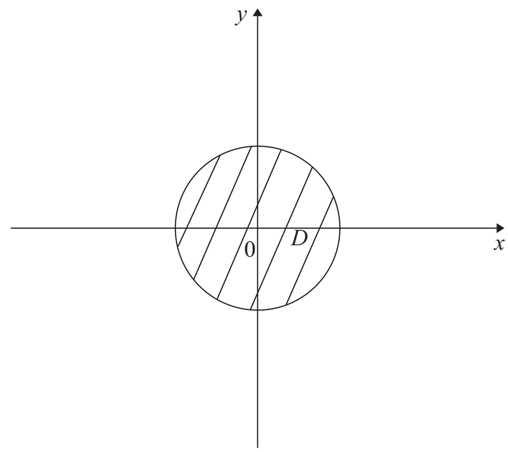


Figura 9.3: Gráfico do domínio da função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Gráficos de funções de duas variáveis

O gráfico (ou imagem) de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertence ao domínio de f.

A função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pode ser visualizada graficamente. Chama-se gráfico de f ao conjunto

$$G(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = f(x, y)\right\}.$$

A representação geométrica de $G(f)$ no espaço $\mathbb{R}^3$ é em geral uma superfície. Veja alguns exemplos a seguir:

Exemplo 9.3 *Esboce o gráfico da função* $z = 4 - 2x - 3y$.

Resolução: Para $z = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 4$. Agora construa a reta no plano xy. Para construir essa reta, consideramos inicialmente $x = 0$, implicando $y = \dfrac{4}{3}$. Então, temos o ponto $(0, \frac{4}{3}, 0)$. Analogamente, supondo agora $y = 0$, obtemos $x = 2$. Então, temos o ponto $(2, 0, 0)$.

Para $x = 0 \Rightarrow z + 3y = 4 \Rightarrow 3y + z = 4$. Agora construa a reta no plano yz. Para construir essa reta, consideramos inicialmente $y = 0$, implicando $z = 4$. Então, temos o ponto $(0,0,4)$. Analogamente, considerando $z = 0$, obtemos $y = \dfrac{4}{3}$, o que dá o ponto $(0,\dfrac{4}{3},0)$

Para $y = 0 \Rightarrow z + 2x = 4 \Rightarrow 2x + z = 4$. Agora construa a reta no plano xz. Para construir a reta $2x + z = 4$ seguindo os mesmos passos obtemos os pontos $(2,0,0)$ e $(0,0,4)$.

Veja o gráfico da função dada abaixo

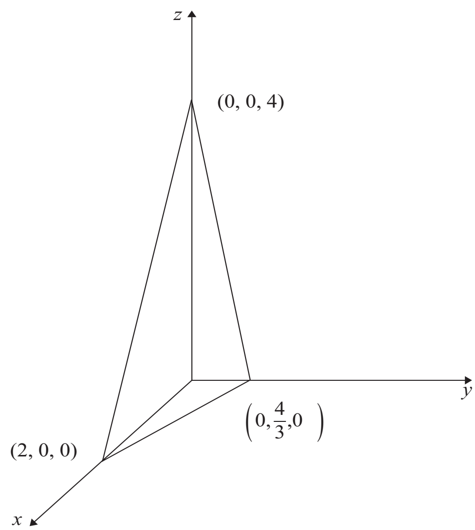


Figura 9.4

Exemplo 9.4 *O gráfico da função dada no Exemplo 9.2(c) resulta em um hemisfério inferior da esfera de raio 2. Veja o gráfico abaixo*

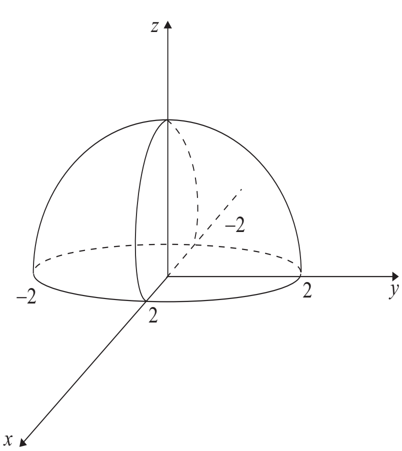


Figura 9.5

Curvas de nível

Outro modo conveniente de visualizar geometricamente uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$, consiste em representar no plano xy, as chamadas curvas de nível de f. Essas curvas são definidas a seguir.

Quando atribuímos a z um valor constante k, o conjunto dos pontos (x,y) que satisfazem a equação $f(x,y) = k$ formam, em geral, uma curva c_k, que é chamada ***curva de nível*** *da função f correspondente ao valor $z = k$.*

Não abordamos mais detalhes nessa direção, porque não fazem parte do programa. Os interessados podem ver mais detalhes nos livros citados na bibliografia

.

Limite e continuidade de funções de duas variáveis

As noções de limite e continuidade para funções de duas variáveis, são análogas as que foram vistas para funções de uma variável.

Intuitivamente, *o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende ao ponto (a,b) é o número L (se existir), do qual se aproxima $f(x,y)$ quando (x,y) se aproxima de (a,b), por qualquer caminho, sem, no entanto, ficar igual a (a,b), ou seja,*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L\,.$$

Caso L *seja igual a* $f(a,b)$*, dizemos que* f *é* ***contínua*** *em* (a,b). *Caso contrário,* f *é* ***dita descontínua*** *em* (a,b).

Exemplo 9.5 *Veja como calcular alguns limites de funções de duas variáveis:*

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(x^3 + 2x^2y - y^2 + 2\right) = 0^3 + 2\cdot 0^2\cdot 1 - 1^2 + 2 = 1$

(b)

(c) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*, onde*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nesse caso,

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y - 2x^2 - 4y + 8}{xy - 2y} = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\cancel{(x-2)}\,(x+2)(y-2)}{y\,\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)\,\lim_{y\to 1}\frac{(y-2)}{y} = 4(-1) = -4.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2$$

$$= 0^2 + 0^2 = 0, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Como $f(0,0) = 2$*, então podemos dizer que* $f(x,y)$ *não é contínua, pois*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq 2\,.$$

Observação *As funções dadas nos exemplo 9.5 (a) e (b) são contínuas.*

Derivadas parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Para discutir a diferenciação de f, faremos uma restrição ao caso unidimensional tratando a função f como uma função de uma variável e considerando as outras fixas. Isto nos leva ao conceito de derivada parcial. É interessante saber qual o ritmo de variação de $f(x, y)$ correspondente a pequenas variações de x e y. Vamos inicialmente, manter fixa uma das variáveis e calcular o ritmo de variação de $f(x, y)$ em relação à outra variável. Este processo chama-se derivada parcial, que explicaremos a seguir.

Consideremos um ponto (a,b), se mantivermos y constante no valor b e variamos x do valor a para o valor $a + \Delta x$, a função $f(x, y)$ dependerá apenas da variável x. Vamos considerar

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b) - f(a, b).$$

A razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}.$$

Chamamos *de taxa média de variação de* f *em relação à* x.

A seguir definiremos o conceito de derivada parcial*.

GLOSSÁRIO

Derivada parcial*: de uma função de várias variáveis é a sua derivada com respeito a uma daquelas variáveis, com as outras variáveis mantidas constantes. **Fonte:** http://pt.wikipedia.org/wiki/

Seja f uma função de duas variáveis x e y. A derivada parcial de f em relação à x é a função denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

se este limite existir.

A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y é a função denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}$ e definida como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \qquad (2)$$

se este limite existir.

Observação

(i) Nas definições 9.2 e 9.3, os limites (1) e (2) podem ser reescritos, respectivamente por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

quando estamos calculando as derivadas parciais num ponto (x_0, y_0).

(ii) O processo através do qual encontramos uma derivada parcial, é chamado diferenciação parcial.

- **Notações**

Seja $z = f(x,y)$, então as derivadas parciais podem ser denotadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} f_x(x,y) = D_1 f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = D_2 f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Exemplo 9.6 *Encontre* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *se* $f(x,y) = 2x - y + 4$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) - y + 4 - 2x + y - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} \\ &= 2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x - y - \Delta y + 4 - 2x + y - 4}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Exemplo 9.7 *Encontre* $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$, f *do exemplo 9.6.*

Resolução: Usaremos as mesmas definições, ao que agora estamos diante da derivada parcial de f em um ponto dado (x_0, y_0), ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0},\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Temos, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,2) - f(1,2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2 + 4 - 4}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{x - 1}$$

$$= 2$$

As derivadas de função de uma variável são chamadas ***derivadas ordinárias***.

Atenção:

Observando as definições 9.2 e 9.3 podemos concluir que $\frac{\partial f}{\partial x}$ *pode ser uma derivada ordinária desde que para encontrá-la suponhamos* f *como função apenas de* x. (y *constante). Ainda* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *pode ser uma derivada ordinária já que para encontrá-la suponhamos* f *como função apenas de* y, (x *constante).*

O exemplo a seguir dá diversas situações de cálculo de derivadas parciais utilizando o procedimento direto citado acima.

Exemplo 9.8 *Encontre derivadas parciais das seguintes funções:*

(i) $f(x, y) = 2x - y + 4$ *;*

(ii) $f(x, y) = xy^2 - 5xy + 7$ *;*

(iii) $f(x,y) = 2x^3 - 8x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$ *;*

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *;*

Resolução: Resolvemos os exemplos acima aplicando o procedimento direto, mas é necessário que o aluno lembre os procedimentos de cálculo de derivada ordinária, regra de cadeia, derivada da função composta, etc.

(i) É dado que $f(x,y) = 2x - y + 4$. Então, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

(ii) É dado que $f(x,y) = xy^2 - 5xy + 7$. Então, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 5y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 5x.$$

(iii) É dada a função: $f(x,y) = 2x^3 - 8x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$. Então, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 16xy + 3y^2 + 7 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -8x^2 + 6xy - 8.$$

(iv) Neste caso, calculamos as derivadas parciais em duas etapas. A primeira, considerando $y \neq 0$ ea segunda considerando $y = 0$, pois observamos que a função dada é definida em duas partes.

(a) Para $y \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} - \dfrac{0}{y^2}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x\left(x^2 + y^2\right)} \\ &= \frac{-y^3}{y^2} = -y. \end{aligned}$$

(b) Para $y = 0$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y.

Analogamente, concluímos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$.

Derivadas parciais sucessivas

Seja $z = f(x,y)$. As derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ são, em geral, funções das variáveis x e y. A partir dessas funções podemos definir novas derivadas parciais e obtemos assim 4 derivadas parciais de 2ª ordem.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Outras Notações: f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}.

Analogamente, definimos as derivadas de 3ª, 4ª ordens.

Exemplo 9.9 Dada a função $z = y^2 e^x + x^2 y + 1$, calcule f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}.

Resolução: É dado que

$$z = y^2 e^x + x^2 y + 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy$$
$$\Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y,$$

e

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 2x.$$

Novamente,

$$z = y^2 e^x + x^2 y + 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + x^2$$

$$\Rightarrow f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x,$$

e

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ye^x + 2x$$

Exemplo 9.10 Mostrar que se $z = \ln(x^2 + y^2)$, então $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Resolução: É dado que

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2x(x^2 + y^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(x^2 + y^2)^{-1} + (2x)(-1)(x^2 + y^2)^{-2}(2x)$$

$$= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Como a função dada $z = \ln(x^2 + y^2)$ é simétrica em x e y, então podemos facilmente concluir que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Agora,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

o que demonstra o resultado.

Observação (Teorema de Schwartz). *Seja $z = f(x,y)$ definida em um domínio D. Se z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ são contínuas em D, então*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \ em\, D.$$

Exercícios propostos – 1

- Encontre derivadas parciais das seguintes funções:
  1) $z = x^2 y + \text{sen}(x^2 y)$;
  2) $f(x,y) = x^2 e^{y^2}$;
  3) $f(x,y) = x y^2 e^{xy}$;
  4) $f(x,y) = x^2 y \ln(xy^2)$;
  5) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$;
  6) $f(x,y) = \sqrt{xy} = x^{1/2} y^{1/2}$;
  7) $w = x\,\text{sen}^3(xy)$.

Máximos e mínimos de uma função de duas variáveis

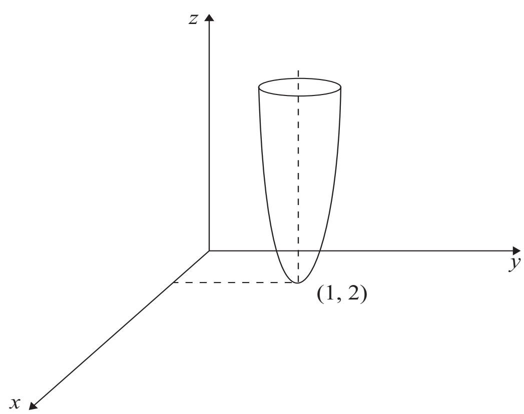
Seja $z = f(x,y)$ definida e contínua em domínio D com $f(a,b) \in D$.

A função $z = f(x,y)$ tem um máximo no ponto $P(a,b)$ se $f(x,y) < f(a,b)$ para todo $(x,y) \in D$ "suficientemente" próximo de (a,b).

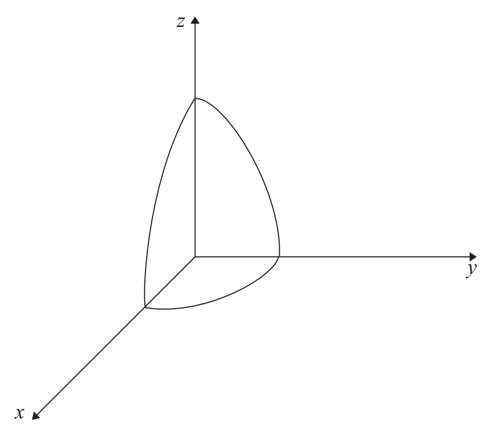
A função $z = f(x,y)$ tem um mínimo no ponto $P(a,b)$ se $f(x,y) > f(a,b)$ para todo $(x,y) \in D$ "suficientemente" próximo de (a,b).

Observação *Os máximos e mínimos de uma função são ditos* ***extremos*** *da função.*

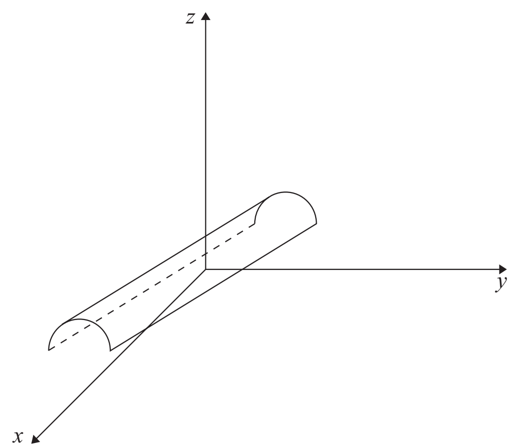
Exemplo 9.11 a) Pelo gráfico, podemos observar que a função $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ tem um mínimo em $P(1,2)$, pois $f(1,2) = -1$ e $f(x,y) > f(1,2)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



a) Analogamente, a função $z = 4 - x^2 - y^2$ tem um mínimo em $P(0,0)$, pois $f(0,0) = 4$ e $f(x,y) < f(0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



b) Para a função $z = y^2 - x^2$, o ponto $P(0,0)$ não é ponto de máximo nem ponto de mínimo de z, pois $f(0,0) = 0$ e $f(2,0) = -4$ e $f(0,2) = 4$.



Condição necessária para existência de um extremo

Se o ponto $P(a,b)$ é um extremo da função então cada derivada parcial de 1ª ordem é nula (ou não existe no ponto $P(a,b)$), isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 .$$

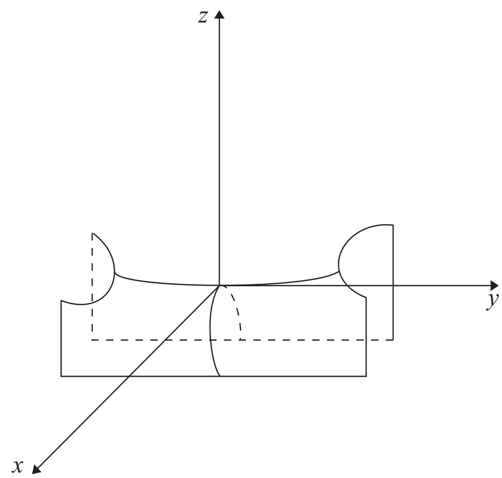
Observação 9.6 *Esta condição é necessária, mas não suficiente para que a função tenha um extremo.*

O exemplo a seguir ilustra este fato. Vamos considerar a função $z = y^2 - x^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 .$$

Pelo gráfico, podemos observar que o ponto $(0,0)$ não é ponto de máximo e nem de mínimo. Porém, o gráfico, abaixo mostra que f não tem extremos em $(0,0)$.



*Os pontos pertencentes ao domínio de uma função $f(x, y)$, em que, as derivadas parciais de f não existem, ou são ambas nulas, chamam-se **pontos críticos** de f.*

*Um ponto crítico que não é ponto de máximo nem de mínimo, chama-se **ponto de sela**.*

Se as derivadas parciais de 2ª ordem de $f(x, y)$ existem no ponto (a,b), definimos o determinante Hessiano de f em (a,b), denotado por $H(a,b)$ como

$$H(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}.$$

Condição suficiente para existência de extremos

Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas de 1ª e 2ª ordem são contínuas num certo domínio contendo o ponto $P(a,b)$.

Seja $P(a,b)$ um **ponto crítico** de $z = f(x, y)$, isto é,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Seja $H(a,b)$ o Hessiano de $z = f(x,y)$. Abaixo são as condições que permitem nos identificar os pontos críticos:

(i) Se $H(a,b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então (a,b) é ponto de máximo de f.

(ii) Se $H(a,b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então (a,b) é ponto de mínimo de f.

(iii) Se $H(a,b) < 0$, então (a,b) é ponto de sela.

(iv) Se $H(a,b) = 0$, nada se pode afirmar.

Exemplo 9.12 Pesquisar máximos e mínimos das funções.

(i) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

(ii) $z = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

Resolução: (i) Calculando as primeiras derivadas parciais e igualando a zero, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} -4x - 2y - 6 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$-3x - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ e $-3 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$.

Logo, $(-3,3)$ é um ponto crítico. Vamos analisar agora esse ponto, através de segundas derivadas parciais de segunda ordem.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-3,3) = 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-3,3) = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-3,3) = 2\,.$$

O valor de Hessiano é dado por

$$H(-3,3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3\,.$$

Como $H(-3,3) = 3 > 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-3,3) = 2 > 0$, portanto $(-3,3)$ é ponto de mínimo de z

Podemos também calcular o valor da função para esse ponto, o que é dado por

$$\begin{aligned} z &= (-3)^2 + (-3)3 + 3^2 + 3(-3) - 3(3) + 4 \\ &= 9 - 9 + 9 - 9 - 9 + 4 = -5. \end{aligned}$$

(ii) Calculando as primeiras derivadas parciais e igualando a zero, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y - 10x + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Agora,

$2y - 10x + 4 = 0$ e $2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{4}{3}$.

Logo, $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é um ponto crítico. Vamos analisar agora esse ponto ,através de segundas derivadas parciais de segunda ordem.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -10\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\,.$$

O valor de Hessiano é dado por

$$H\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = -10 < 0$$

Como $H\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) > 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = -10 < 0$, portanto $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ é ponto de máximo de z.

O valor da função para esse ponto, é dado por

$$z = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$$

$$= 2\frac{2}{3}\frac{4}{3} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4\frac{2}{3} + 4\frac{4}{3} - 4 = 0.$$

Exercícios propostos – 2

- Determinar os pontos críticos das funções dadas, classificando-os, quando possível:

1) $z = 4 - x^2 - y^2$.
2) $z = 2x^2 + y^2 - 5$.
3) $z = 4xy$.
4) $z = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 7$.
5) $z = x^2 - y^2$

Integral dupla

Sabemos que a integral simples ou ordinária é dada por

$$\int_a^b f(x)dx,$$

onde, o integrando é uma função $f(x)$ definida em $[a,b]$. A integral dupla é representada por

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy.$$

Neste caso, o integrando é uma função de duas variáveis $f(x,y)$

definida para todo par $(x, y) \in R$, onde R é uma região **fechada** e **limitada** do plano xy. Veja a figura a seguir:

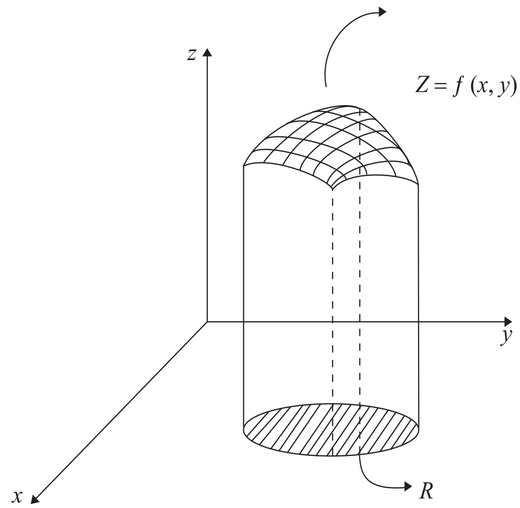


Figura 9.8

Vale destacar...

A integral dupla $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ *representa o volume da região do espaço abaixo do gráfico de* $z = f(x,y)$ *e acima da região* R*, onde* $f(x,y) \geq 0$.

- **Propriedades da integral dupla**

(i) $\iint\limits_R k\,f(x,y)dxdy = k\iint\limits_R f(x,y)dxdy$, k = constante;

(ii) $\iint\limits_R (f+g)dxdy = \iint\limits_R f\,dxdy + \iint\limits_R g\,dxdy$;

(iii) $\iint\limits_R f\,dxdy = \iint\limits_{R_1} f\,dxdy + \iint\limits_{R_2} f\,dxdy$, onde $R = R_1 \cup R_2$, conforme a figura

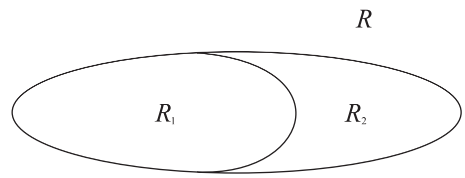


Figura 9.9

Cálculo da integral dupla

A integral dupla pode ser calculada por meio de duas integrais sucessivas. A seguir, explicamos o cálculo de integral dupla em dois casos diferentes.

1º Caso: A região R é um retângulo: $R = [a,b] \times [c,d]$.

Neste caso,

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx,$$

sendo que na primeira integração uma das variáveis funciona como constante.

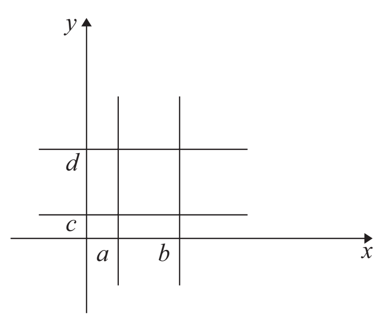


Figura 9.10

Exemplo 9.13 Calcular

$$I = \iint_R x^2 y\,dxdy,$$

sendo $R = [1,3] \times [0,4]$.

Resolução: Temos

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left[\int_0^4 x^2 y\,dy \right] dx \\
&= \int_1^3 \left. \frac{x^2 y^2}{2} \right|_0^4 dx \\
&= \int_1^3 8x^2 dx \\
&= 8 \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 \\
&= \frac{208}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 9.14 *Calcular*

$$I = \iint_R x \operatorname{sen}(x\,y)\,dx\,dy\,,$$

onde $R = \left[0, \pi\right] \times \left[0, 1\right]$.

Resolução: Temos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \left[\int_0^1 x \operatorname{sen}(x\,y)\,dy \right] dx \\
&= \int_0^\pi \left[x \frac{-1}{x} \cos(x\,y) \Big|_0^1 \right] dx \\
&= \int_0^\pi (-\cos x \cdot 1 + \cos x \cdot 0) dx \\
&= \int_0^\pi (-\cos x + 1) dx \\
&= (-\operatorname{sen} x + x)\Big|_0^\pi \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Exemplo 9.15 *Calcular*

$$\iint_R \left(4 - x^2 - y^2\right) dx\,dy,$$

sabendo que o domínio R *está limitado pelas retas* $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ *e* $y = \dfrac{3}{2}$.

Resolução: Veja abaixo a região dada:

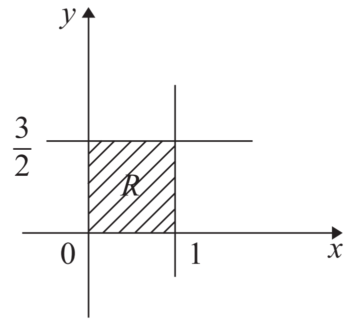


Figura 9.11

Fazendo os cálculos, obtemos

$$I = \int_0^{3/2}\int_0^1 \left(4 - x^2 - y^2\right) dx\,dy = \frac{35}{8}.$$

2º Caso: Quando R é uma região qualquer. Neste caso devemos fixar primeiro os valores de x e depois colocar y em termos de x. Veja a região abaixo

$$R = \begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases}$$

Graficamente a região fica assim:

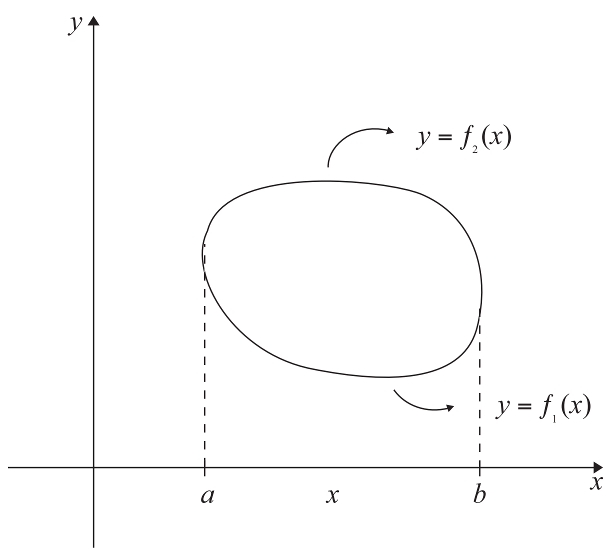


Figura 9.12

Neste caso, primeiro é necessário resolver a integral dupla em termos de y e depois em termos de x, ou seja, primeiro em termos de variável dependente e depois em termos de variável independente.

Analogamente, podemos fazer o contrário, ou seja, fixamos primeiro y e escrevemos x em termos de x. Veja a região abaixo:

$$R = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \end{cases}$$

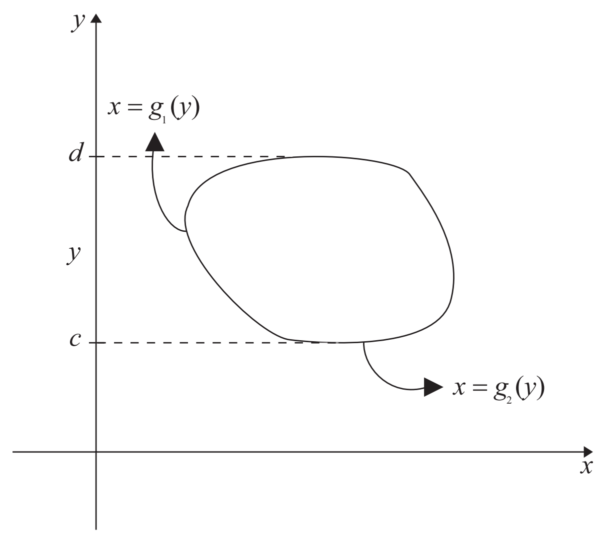


Figura 9.13

Neste caso, primeiro é necessário resolver a integral dupla em termos de x e depois em termos de y, ou seja, primeiro em termos de variável dependente e depois em termos de variável independente.

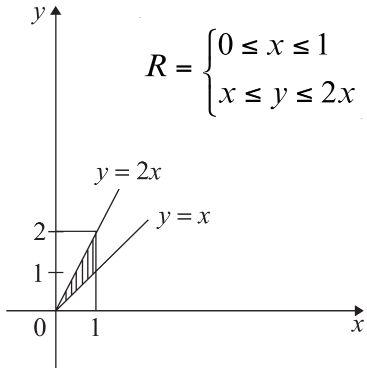
Veja alguns exemplos abaixo:

Exemplo 9.16 *Calcular*

$$I = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx dy,$$

sendo R *a região limitada pelas retas* $y = x$, $y = 2x$ *e* $x = 1$.

Resolução: Neste caso a região é dada por



$$R = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2x \end{cases}$$

Figura 9.14

Conforme a região dada acima, temos

$$I = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} \left(x^2 + y^2 \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_x^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left[x^2 2x + \frac{(2x)^3}{3} \right] - \left[x^2 x + \frac{(x)^3}{3} \right] \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{10x^3}{3} dx = \frac{10}{3} \frac{x^4}{4} \Bigg|_0^1 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Exemplo 9.17 *Calcular*

$$I = \iint_R x\, dx dy,$$

sendo R *a região limitada pelas curvas* $y = x$, $y = x^2$.

Resolução: Neste caso,

$$R = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}.$$

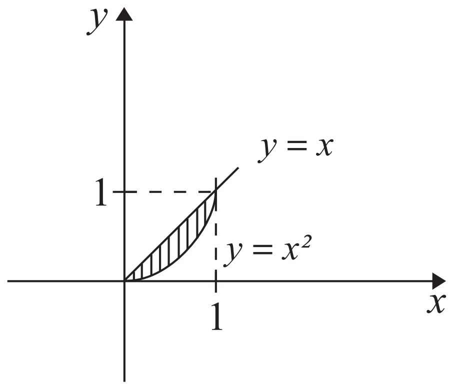


Figura 9.15

Conforme a região dada acima, temos

$$I=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x}x\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 x\,y\Big|_{x^2}^{x}\,dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}.$$

Exemplo 9.18 *Calcular*

$$I=\iint_R (y+1)\,dx\,dy,$$

onde R *é a região do primeiro quadrante, limitada por* $y^2=x$, $y=-x+2$ *e* $y=0$.

Resolução: Neste caso,

$$R=\begin{cases}0\le y\le 1\\ y^2\le x\le 2-y\end{cases}.$$

Graficamente, a região é dada por

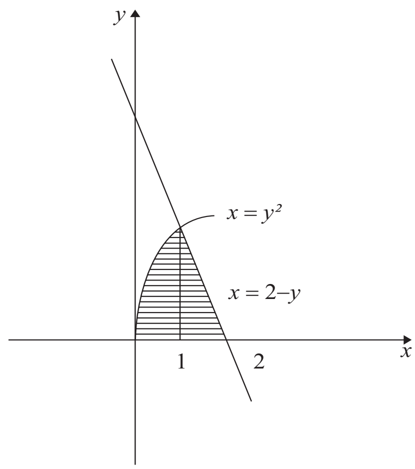


Figura 9.16

Conforme a região dada acima, temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{2-y} (y+1)\,dx \right] dy \\
&= \int_0^1 (y+1)\,x\Big|_{y^2}^{2-y}\,dy \\
&= \int_0^1 (y+1)\left[2 - y - y^2\right] dy \\
&= \int_0^1 \left(2y + 2 - y^2 - y - y^3 - y^2\right) dy \\
&= \frac{2y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= 1 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{36 - 4 - 6 - 3 - 4}{12} = \frac{19}{12}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 9.19 *Calcular*

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy\,dx$$

e descrever a região R.

Resolução: Temos a região

$$R = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$

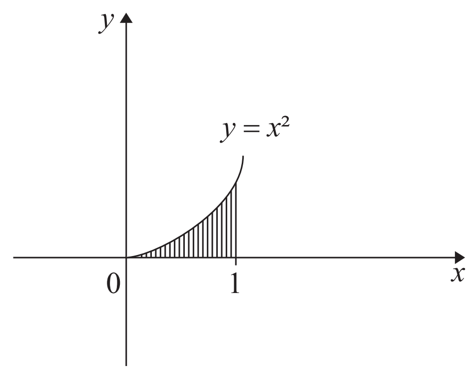


Figura 9.17

Fazendo os cálculos, obtemos

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 x^2 + \frac{\left(x^2\right)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{21+5}{105} = \frac{26}{105}.$$

Exemplo 9.20 *Calcular*

$$\iint_R (1 + x + y)\, dx\, dy,$$

onde R está limitada por $y = -x$, $x = \sqrt{y}$ e $y = 2$.

Resolução: Temos a região dada por

$$R = \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -y \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

Graficamente, temos

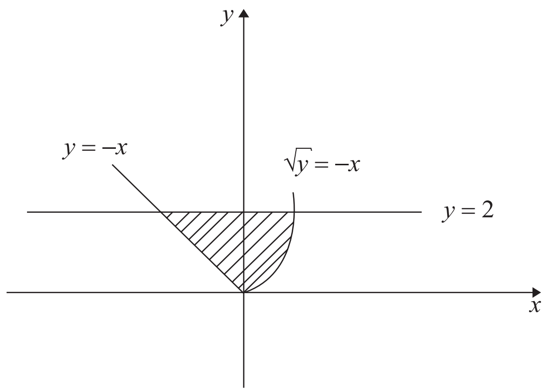


Figura 9.18

Fazendo os cálculos, obtemos

$$I = \iint_R (1 + x + y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[\int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)dx \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{x^2}{2} + x\,y \right)\Bigg|_{-y}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^2 \left[\sqrt{y} + \frac{y}{2} + y^{3/2} + y - \frac{y^2}{2} + y^2 \right] dy$$

$$= \frac{y^{3/2}}{3/2} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^{5/2}}{5/2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{2^{3/2}}{3/2} + \frac{4}{4} + \frac{2^{5/2}}{5/2} + \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} + 1 + \frac{8}{5}\sqrt{2} + 2 + \frac{4}{3}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{5} \right) + 3 + \frac{4}{3}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{20 + 24}{2} \right) + \frac{9 + 4}{3}$$

$$= \frac{44}{15}\sqrt{2} + \frac{13}{3}.$$

Exercícios propostos – 3

1) Calcular $\iint f(x,y)dxdy$, onde

a) $f(x,y) = xe^{xy}$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 1$;

b) $f(x,y) = ye^{xy}$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 1$;

2) Calcular as seguintes integrais duplas

a) $\int_1^3 \int_0^1 (1+4xy)\, dx\, dy$;

b) $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \text{ sen } y\, dy\, dx$

3) Calcular as seguintes integrais duplas

a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x+2y)\, dy\, dx$;

b) $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx\, dy$;

c) $\int_0^2 \int_{-x}^{x} x^3 y^2\, dy\, dx$.

4) Calcular a integral dupla

$$\iint_R x \cos y\, dx\, dy,$$

onde R é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$.

5) Calcular a integral dupla

$$\iint_R \frac{xy}{x^2+1}\, dy\, dx,$$

onde R é a região limitada por $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le \sqrt{x}$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os contúdos abordados neste capítulo consulte:

- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo B**: Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Triplas. São Paulo: Makron Books, 1999.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B., **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração. 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.

RESUMO

Nesta Unidade você aprendeu a noção de funções de duas ou mais variáveis. Também conheceu as definições de limite e de continuidade. Foram abordadas derivadas parciais com aplicações em máximos e mínimos e finalmente, teve um breve conhecimento de integral dupla

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \cos\left(x^2 y\right)2xy = 2xy\left(1+\cos\left(x^2 y\right)\right) \text{ e}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \cos\left(x^2 y\right)x^2 = x^2\left(1+\cos\left(x^2 y\right)\right).$$

2) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{y^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{y^2}2y = 2x^2 y e^{y^2}.$$

3) $$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\left[1\cdot e^{xy} + xe^{xy}y\right] \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{xy} + xy^2 e^{xy}x.$$

4) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\ln\left(xy^2\right) + \frac{x2y}{x} \text{ e } \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ln\left(xy^2\right) + 2x^2.$$

5) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\left(x+y\right) - xy\cdot 1}{\left(x+y\right)^2} = \frac{yx + y^2 - xy}{\left(x+y\right)^2} = \frac{y^2}{\left(x+y\right)^2} \text{ e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\left(x+y\right) - xy\cdot 1}{\left(x+y\right)^2} = \frac{x^2 + xy - xy}{\left(x+y\right)^2} = \frac{x^2}{\left(x+y\right)^2}.$$

6) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} \text{ e } \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^{1/2}\frac{1}{2}y^{-1/2}.$$

7) $$\frac{\partial w}{\partial x} = 1\cdot \operatorname{sen}^3(xy) + x\operatorname{sen}^2(xy)\cos(xy)y \text{ e}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = x3\operatorname{sen}^2(xy)\cos(xy)x = 3x^2\operatorname{sen}^2(xy)\cos(xy).$$

- **Exercícios propostos – 2**

1) (0,0) ponto de máximo;
2) (0,0) ponto de mínimo;
3) (0,0) ponto de sela;
4) (3,1) ponto de mínimo;
5) (0,0) ponto de sela e $(-1,-1)$ ponto de máximo;

6) $(2,2)$ ponto de sela e $(-2,2)$ ponto de máximo.

7) (0,0) ponto de sela.

- **Exercícios propostos – 3**

1) a) $e^3 - 4$. b) $e^3 - 4$.

2) a) 10. b) 2.

3) a) $\frac{9}{20}$. b) $\frac{4}{9}e^{3/2} - \frac{32}{45}$.

c) $\frac{256}{21}$.

4) $1 - \cos 1$.

5) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G.S.S. **Cálculo das funções de uma variável**. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A***:* Funções, Limite, Derivação, Integração. 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

GOLDSTEIN, Larry J.; LAY, David C.; SCHNEIDER, David I. **Matemática aplicada**: economia, administração e contabilidade. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo B***:* Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Triplas. São Paulo: Makron Books, 1999.

KUELKAMP, Nilo. **Cálculo 1**. 3ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Vol. 1 e 2.

LEITHOLD, Louis. **Matemática aplicada à economia e administração**. Harbra, São Paulo: 1988.

MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.

MUROLO, Afrânio Carlos; BONETO, Giácomo Augusto. **Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

STEWART, James. **Cálculo**. 4 ed. São Paulo: Thomson Leorving, 2003. Vol. 1.

STEINBRUCH, A.; P. WINTERLE. **Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 1987.

TAN, S.T. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

THOMAS, George B. **Cálculo.** 10 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002. Vol. 1.

WEBER, J.A. **Matemática para Economia e Administração**. São Paulo: Harper and Row do Brasil, 1988.

TANEJA, I. J., **Maple V***:* Uma Abordagem Computacional no Ensino de Cálculo, Editora da UFSC, 1997.

SITES NA INTERNET

- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo
- www.dma.uem.br//kit/
- www.hottopos.çom.br/regeq8/cardoso2.htm-23k
- http://www.exatas.hpg.ig.com.br/historia.htm
- http://euler.mat.ufrgs.br/~portosil/oque.html
- http://mat.ufpb.br/histcalc.htm
- http://www.gregosetroianos.mat.br/calculo.asp
- http://www.geocities.com/guida_cruz2000/histmat.htm
- http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexhm.html
- http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/calculo1/cap1_11.html
- http://www.somatematica.com.br/coluna/19032002.php
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/calculo/nreais/nreais.htm

- http://www.apm.pt/nucleos/coimbra/bimat/bimat7/bimat72.htm
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/mapa_historia.htm
- http://www.exatas.hpg.ig.com.br/links.htm
- http://www.mtm.ufsc.br/~taneja/Maple/mapmat.htm

FERNANDO GUERRA

Licencidado em Matemática pela Universidade Presidente Antônio Carlos de Barbacena/Minas Gerais (1974). Mestre em Teoria da Informação pela Universidade Federal de Santa Catarina (1980). Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFSC desde 1978.

E-mail – guerra@mtm.ufsc.br

INDER JEET TANEJA

Doutor (PhD) pela Universidade de Delhi, India (1975). Pós-Doutor nas Áreas de Teoria da Informação na Itália (1983-1984) e em Estatística na Espanha (1989-1990). Pesquisador com área de concentração em Teoria da Informação na qual tem aproximadamente 80 artigos, 05 capítulos e 01 livro publicados. Professor Titular do Departamento de Matémática da UFSC desde 1978.

E-mail – taneja@mtm.ufsc.br