LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA II

cead

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Universidade Federal de Viçosa

Reitora
Nilda de Fátima Ferreira Soares

Vice-Reitor
Demétrius David da Silva

Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

Diretor
Frederico Vieira Passos

Prédio CEE, Avenida PH Rolfs s/n
Campus Universitário, 36570-000, Viçosa/MG
Telefone: (31) 3899 2858 | Fax: (31) 3899 3352

BOTELHO, C. C. - Fundamentos de Matemática II. Viçosa, 2011.

Layout: Diogo Rodrigues e Tim Gouveia

Edição de imagens e Editoração Eletrônica: Pedro Augusto

Capa: Daniel Fardin

Coordenação de Conteúdo e Revisão Final: João Batista Mota

Sumário

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

V136f
2012

Valadares, Cristiane Cupertino Botelho, 1985-
Fundamentos de matemática II [recurso eletrônico] / Cristiane Cupertino Botelho Valadares. – Viçosa, MG : UFV/CEAD, 2012.
149p. : il. (algumas col.) ; 29cm. (Conhecimento, ISSN 2179-1732 ; n.6)

Livro eletrônico.
Bibliografia: p. 149.

1. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância. II. Título.

CDD 22. ed. 510

Sequências

1.1. Noções Iniciais

Frequentemente, nos deparamos com situações em que enumeramos elementos de um conjunto seguindo uma determinada ordenação:

1. da sucessão dos presidentes de um país;
2. da sequência dos episódios de uma minissérie de televisão;
3. dos meses do ano;

Repare que há dois aspectos importantes nos exemplos acima: o tipo e a ordem dos elementos. Todos os elementos de uma sucessão são do mesmo tipo (por exemplo: apenas presidentes) e obedecem a uma ordenação (por exemplo: ocorre o primeiro episódio da minissérie, depois o segundo episódio, depois o terceiro episódio...). Esses são exemplos de sequências que estão presentes em nosso cotidiano. Observando-os podemos definir:

Uma sequência ou sucessão é uma lista ordenada de objetos, números ou eventos, que satisfazem a uma dada propriedade ou regra.

Em outras palavras, a sequência é definida como sendo um conjunto S, dotado das seguintes características:

a. Todos os seus elementos (termos) são do mesmo tipo (por exemplo: capítulos de uma novela);

b. Cada termo possui uma posição definida, dentro do conjunto S;

c. A posição de cada termo é determinada por um número natural, denominado índice;

d. Cada termo possui um único índice, e cada índice pertence a um único termo;

e. Dois termos só podem ser trocados de lugar se os seus respectivos índices também forem.

Exemplos:

1) (1, 3, 5, 7, 9, ...) é uma sequência de números ímpares.

2) (10, 15, 20, 25) é uma sequência de múltiplos de 5 maiores que 5 e menores que 30.

3) (Segunda, terça, quarta, quinta, sexta) é uma sequência dos dias úteis de uma semana.

As sequências podem ser separadas em dois tipos:

•**Sequência infinita:** É aquela que não possui fim, ou seja, os seus elementos seguem ao infinito, como no exemplo 1 .

•**Sequência finita:** É aquela na qual os elementos têm fim, como nos exemplos 2 e 3 .

1.2. Notação

Em uma sequência numérica qualquer, os termos são representados de acordo com a sua posição. O primeiro termo é representado por a_1 (lê-se: a índice um), o segundo por a_2 (lê-se: a índice dois), o terceiro por a_3 (lê-se: a índice três) e assim por diante. Em uma sequência numérica finita desconhecida, o último termo é representado por a_n (lê-se: termo n ou enésimo termo). A letra *n* determina o número de elementos da sequência.

Notações

- **Para uma sequência numérica finita:**

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

Para uma sequência numérica infinita:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$$

- a_n **é o termo geral da sequência.**

1.3. Igualdade de sequências

Duas sequências são iguais somente se tiverem os mesmos elementos dispostos na mesma ordem.

Exemplos:

a) As sequências (a, b, c, d, e) e (2, 3, 5, 7, 11) são iguais se - e somente **se** - a = 2, b = 3, c = 5, d = 7, e = 11.

b) As sequências (2, 5, 7, 1, 1, 2, 2) e (2, 5, 7, 2, 2, 1, 1) apresentam os mesmos elementos, mas não na mesma ordem. Então, são sequências diferentes. Elas podem representar, por exemplo, os números dos telefones de duas residências diferentes.

1.4. Determinação de uma sequência – Lei de Formação

Estamos interessados em sequências nas quais os termos se sucedem obedecendo a uma certa regra, isto é, aqueles que têm uma lei de formação. Esta lei pode ser representada de três maneiras:

a) Por Recorrência: São dadas duas ou mais regras, uma (ou mais) que define os termos iniciais da sequência e outra para calcular os demais termos a partir dos antecessores.

Exemplo:
Considere a sequência infinita (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...). A sua lei de formação é extremamente simples. Cada elemento, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja, , n = 1, 2, 3... Tal sequência é conhecida como Sequência de Fibonacci.

b) Em função do índice da sequência (posição), ou seja, o enésimo termo depende da posição em que ele se encontra.

Exemplo: Seja (a_n) uma sequência, cuja lei de formação seja dada por $a_n = 2n$, n número natural diferente de zero.

$a_1 = 21 = 2$; $a_3 = 23 = 8$;
$a_2 = 22 = 4$; $a_4 = 24 = 16$;
Então: $(a_1, a_2, a_3, a_4 ...) = (2, 4, 8, 16, ...)$

c) Por propriedade dos termos
Exemplo: A sequência cujos termos são os primeiros três números primos: (2, 3, 5).

Teste o seu conhecimento

1. Escreva os quatro primeiros termos das sequências dadas pelas seguintes fórmulas de recorrência:

a) $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2, \forall\ n \geq 2$

b) $b_1 = 3$ e $b_n = 2b_{n-1}, \forall\ n \geq 2$

c) $c_1 = 2$ e $c_n = (c_{n-1})^2, \forall\ n \geq 2$

d) $d_1 = 4$ e $d_n = (-1)^n.d_{n-1}, \forall\ n \geq 2$

e) $e_1 = -2$ e $e_n = (e_{n-1})^n, \forall\ n \geq 2$

2. Escrever os seis termos iniciais das sequências dadas pelas seguintes leis de formação:

a) $a_n = 3n - 2, \forall\ n \geq 1$

b) $b_n = 2.3n,\ \forall\ n \geq 1$

c) $c_n = n(n + 1),\ \forall\ n \geq 1$

d) $d_n = (-2)^n, \forall\ n \geq 1$

e) $e_n = n^3, \forall\ n \geq 1$

3. Descrever, por meio de uma fórmula de recorrência, cada uma das sequências abaixo:

a) (3, 6, 9, 12, 15, 18,...)

Resolução: Note que um termo é sempre o termo anterior somado pelo número 3. Então, podemos escrever nossa fórmula de recorrência do seguinte modo: $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 3$

b) (1, 2, 4, 8, 16, 32,...)

c) (1, -1, 1, -1, 1, -1,...)

d) (5, 6, 7, 8, 9, 10,...)

e) (0, 1, 2, 3, 4, 5,...)

4. Obter o décimo quarto termo da sequência em que $a_n = 2^{10-n}$.

5. Determine o quarto termo da sequência em que $a_n = 2.5^{n-1}$.

6. Complete a sequência (12, 7, 2, -3, ___ , -13, ___) de sete termos.

7. Calcule o produto dos três primeiros elementos da sequência definida por

$a_1=2$ e $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+1$, $n \geq 1$.

8. Considere as sequências (a_n) e (b_n) definidas por $a_n=\dfrac{n^2}{2n+1},\ n \geq 1$ e

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{p+1} = 1 - b_p,\ p \geq 1 \end{cases}$$

Determine os quatro primeiros termos da sequência (c_n) tal que $c_n = a_n + b_n$, $n \geq 1$.

Gabarito

1.
a) (5, 7, 9, 11, ...);
b) (3, 6, 12, 24 , ...);
c) (2, 4, 16, 256 , ...);
d) (4, 4, -4, -4 , ...);
e) (-2, 4, 64, 16777216, ...).

2.
a) (1, 4, 7, 10, 13, 16);
b) (6, 18, 54, 162, 486, 1458);
c) (2, 6, 12, 20, 30, 42);
d) (-2, 4, -8, 16, -32, 64);
e) (1, 8, 27, 64, 125, 216).

3.
a) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall\ n \geq 2$
b) $b_1 = 1$ e $b_n = 2.b_{n-1}$, $\forall\ n \geq 2$
c) $a_1 = 1$ e $a_n = -1.a_{n-1}$, $\forall\ n \geq 2$
d) $d_1 = 5$ e $d_n = d_{n-1} + 1$, $\forall\ n \geq 2$
e) $e_1 = 0$ e $e_n = e_{n-1} + 1$, $\forall\ n \geq 2$

4. $\frac{1}{16}$

5. 250

6. (12, 7, 2, -3, -8, -13, -18)

7. 8

8. $\left\{\frac{1}{3}, \frac{9}{5}, \frac{9}{7}, \frac{25}{9}, \dots\right\}$

Progressão Aritmética (P.A.)

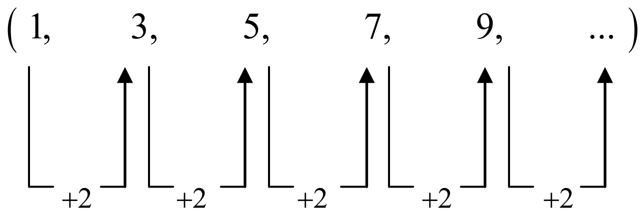
2.1.Noções Iniciais

Uma progressão é uma sucessão de números, um após o outro, ou seja, quando falamos simplesmente progressão, estamos nos referindo a alguns números colocados um após o outro sem, necessariamente, possuir uma lógica em sua distribuição. E para ser uma **PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)**, o que deve acontecer?

Uma progressão aritmética é uma sucessão de números, um após o outro, que segue um "ritmo definido". Veja a progressão abaixo:

(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,...)

Esta progressão segue um ritmo definido, mostrado na figura abaixo:



Ou seja, temos um ritmo que é o de somar duas unidades a cada elemento que acrescentamos. Este é o ritmo que estamos falando, somar sempre o mesmo número a cada elemento acrescentado.

Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r. Essa constante é chamada razão da progressão e é representada pela letra r. Para determinarmos a razão, basta fazer a diferença de dois termos consecutivos da sequência.

Exemplos:

a) (2, 7, 12, 17,...) é uma P.A. com $a_1 = 2$ e $r = 5$.

b) (10, 5, 0, -5, -10, -15,...) é uma P.A. com $a_1 = 10$ e $r = -5$.

c) (19, 19, 19, 19, 19...) é uma P.A. com $a_1 = 19$ e $r = 0$.

d) ($\sqrt{2}+1, \sqrt{2}, \sqrt{2}-1$) é uma P.A. de 3 termos com $a_1 = \sqrt{2}+1$ e $r = -1$

e) (-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, ...) é uma P.A. com $a_1 = -1$ e $r = 0,5$.

2.2. Classificação

Uma sequência de números reais cujos termos vão aumentando, isto é, onde cada termo é maior que o anterior, é denominada sequência crescente. Se os termos vão diminuindo, isto é, cada um é menor que o anterior, a sequência é denominada decrescente. Quando todos os termos são iguais, a sequência é denominada constante ou estacionária. No caso de uma progressão aritmética, é fácil verificar que uma P.A. de razão r é:

- crescente, se $r > 0$ (exemplos (a) e (e)).
- decrescente, se $r < 0$ (exemplos (b) e d)).
- constante, se $r = 0$ (exemplo na).

Termo Geral

Considere a P.A. (a_1, a_2, a_3, ..., a_n,...) de razão r. A fórmula do seu termo geral é expressa do seguinte modo:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)r},$$

onde:

- $\mathbf{a_n}$ é o termo geral ;
- **n** é o número de termos (até na);
- $\mathbf{a_1}$ é o 1º termo;
- **r** é a razão.

Assim, uma P.A. é uma sequência na forma:

$$(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r,...)$$

Exemplo 1:
Determine uma P.A. de 5 termos com $a_1 = 0$ e $r = 2$.

Resolução:
$a_1 = 0$;
$a_2 = a_1 + (2 – 1)r = a_1 + r = 0 + 2 = 2$;
$a_3 = a_1 + (3 – 1)r = a_1 + 2r = 0 + 2(2) = 4$;
$a_4 = a_1 + (4 – 3)r = a_1 + 3r = 0 + 3(2) = 6$;
$a_5 = a_1 + (5 – 1)r = a_1 + 4r = 0 + 4(2) = 8$.

Logo, a P.A. procurada é (2, 4, 6, 8).

Exemplo 2.
Vamos encontrar o termo geral da P.A. dada por (5, 9,...)

Resolução:
Temos que $a_1 = 5$ e $r = 9 - 5 = 4$, então:
$a_n = 5 + (n – 1).4$
$a_n = 5 + 4n – 4$
$a_n = 4n + 1$

Exemplo 3.
Quantos termos existem na P.A. (52, 49, 46, 43,... , -71)?

Resolução:
$a_1 = 52$ e $r = 49 – 52 = -3$.
Fazendo o último termo igual à na, isto é, $n_a = -71$ devemos calcular n. Temos:

$a_n = a_1 + (n – 1)r$
$-71 = 52 + (n – 1)(-3)$
$-71 = 52 – 3n + 3$
$3n = 55 + 71$
$n = 42$

Observação: Quando procuramos obter uma P.A. com 3 termos, é muito prática a notação seguinte: $(x – r, x, x + r)$.

Exemplo: Obter uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

Resolução: Empregando a notação especial $(x – r, x, x + r)$ para P.A., temos:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 24 \quad (1) \\ (x - r).\ x.\ (x + r) = 440 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) obtemos x = 8, e substituindo em (2) vem:
(8 – r). 8. (8 + r) = 440 e daí r = 3 ou r = -3
Assim, a P.A. procurada é (5, 8, 11) para x = 8 e r = 3, ou, (11, 8, 5) para x = 8 e r = -3.

2.4. Propriedades dos termos de uma P.A.

As seguintes propriedades são típicas de Progressões Aritméticas e justificam, inclusive, o nome dessas sequências.

1 Dados 3 termos consecutivos de uma sequência aritmética, o termo central é a média aritmética entre o anterior e o seguinte. Isto é, se (a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_n, a_n+1,...) é uma sequência aritmética, então

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

Exemplo: Consideremos a P.A. (5, 9, 13, 17, 21, 25, 29,...) e observemos que:

$$9 = \frac{5+13}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$ (a_2 é média aritmética de a_1 e a_3)

b) Numa P.A., os termos opostos ou equidistantes (aqueles que estão à mesma distância do termo central da P.A.) têm a mesma soma.

$$(\ 2,\quad 8,\quad 14,\quad 20,\quad 26,\quad 32,\quad 38\ )$$

c) Numa P.A. com número ímpar de termos, o termo médio é igual à média aritmética entre os extremos.

Exemplo: Na P.A. (2, 4, 6, 8, 10), temos:

$$a_1 = 2 \quad a_3 = 6 \quad a_5 = 10$$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{2+10}{2} \Rightarrow a_3 = 6$$

2.5. Interpolação Aritmética

Considere a sequência finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n). Os termos a_1 e na são chamados extremos e os demais são chamados meios. Assim, na P.A. (0,3, 6, 9, 12, 15) os extremos são 0 e 15, enquanto os meios são 3,6,9,12.

Interpolar, inserir ou intercalar K meios aritméticos entre os números a e b significa obter um P.A. de extremos a_1= a e a_n=b, com n = K +2 termos. Para determinar os meios dessa P.A., é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$b = a + (k+1).r$$

$$r = \frac{b-a}{k+1}$$

Exemplo: Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.
Resolução: Vamos formar uma P.A. com 7 termos onde a_1 = 1 e a_7 = 2. Temos:

$$a_7 = a_1 + 6.r \Rightarrow r = \frac{a_7 - a_1}{6} \Rightarrow r = \frac{2 - 1}{6} \Rightarrow r = \frac{1}{6}$$

Então, a P.A. procurada é dada por .

2.6. Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Dada uma sequência qualquer (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n...), indicamos por Sn a soma dos seus n primeiros termos e sua expressão é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Onde

- a_1 é o 1º termo;
- a_n é o termo geral;
- *n* é o número de termos.

Exemplo: Calcule a soma dos trinta primeiros termos da P.A. (4,10...).

Resolução: Vamos começar determinando o 30º termo. Como n = 30, $a_1 = 4$ e $r = a_2 - a_1 = 6$, então:

$$a_{30} = a_1 + (n - 1)r$$
$$a_{30} = 4 + (30 - 1)6$$
$$a_{30} = 178$$

Assim,

$$S_{30} = \frac{(4 + 178)30}{2} \Rightarrow S_{30} = 2730$$

Exemplo: Em relação à sequência dos números naturais ímpares, vamos calcular:

a) A soma dos cinquenta primeiros termos
b) A soma dos *n* primeiros termos

Resolução: A sequência é (1,3,5,7,...), onde $a_1 = 1$ e $r = 3 - 1 = 2$

a) $a_{50} = a_1 + 49r \longrightarrow a_{50} = 1 + 49(2) = 99$

Assim,

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})50}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(1 + 99)50}{2} \Rightarrow S_{50} = 2500$$

b) $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$a_n = 1 + (n - 1)2$$

$$a_n = -1 + 2n$$

Daí,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n)n}{2} = n^2$$

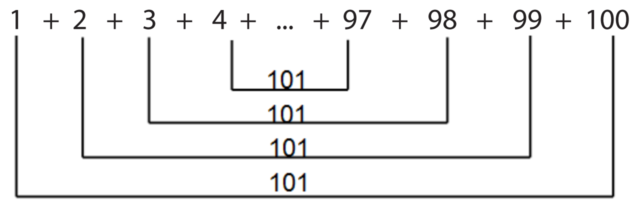
Podemos verificar a resposta encontrada em b, atribuindo valores para n ($n \in N$, $n \geq 1$):

- Para *n* = 1, a sequência é (1) e assim, $S_1 = 1^2 = 1$;
- Para *n* = 2, a sequência é (1,3), cuja soma é $S_2 = 2^2 = 4$;
- Para *n* = 3, a sequência é (1,3,5), cuja soma é $S_3 = 3^2 = 9$.

E assim por diante.

2.7. Um pouco de História

Johann Friederich Carl Gauss, conhecido como Gauss, nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de Abril de 1777. De família humilde, mas com o incentivo de sua mãe, obteve carreira brilhante. Gauss deu sinais de ser um gênio antes dos três anos de idade. Nessa idade, aprendeu a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente. Aos dez anos, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos, Gauss apresentou o resultado correto. Até então, ninguém tinha sido capaz desse feito. Ele se baseou no fato de que a soma dos números opostos é sempre constante, como mostra a figura:



Então, ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando a fórmula da soma da progressão aritmética:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Teste o seu conhecimento

1. Assinale as sequências que representam Progressões Aritméticas:

a) (13, 11, 9, 7...)

b) (6, 11, 15)

c) (4, -7, -10...)

d) (0, 7, 14, 21...)

e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\right)$

f) ($\sqrt{2}$, 1+ $\sqrt{2}$, 2+ $\sqrt{2}$ ...)

2. Determine a razão de cada uma das progressões aritméticas e, em seguida, classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (-16, -5, 6, 17...)

b) (22, 18, 14, 10...)

c) $\left(\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots\right)$

d) (3, 3, 3, 3...)

e) (-3, -12, -21...)

f) (b, 2b, 3b, 4b...); b>0

3. Qual é o 15º termo da P.A. (1, 4, 7, 10...)?

4. Qual é o 18º termo da P.A. (-5, -1, 3, 7...)?

5. Qual é o 100º número ímpar?

6. O 8º termo de um P.A. é 15 e o 1º termo é igual a 1. Qual é a razão dessa P.A.?

7. O 6º termo de um P.A. é 17 e o 1º termo é igual a 2. Qual é a razão dessa P.A.?

8. Numa P.A. de razão igual a 5, o 10º termo é igual a 45. Qual o 1º termo?

9. Numa P.A. de razão igual a –2, o 8º termo é igual a 10. Qual é o 1º termo?

10. Dada a P.A. (5, 8, 11,...), determine:

a) seu termo geral b) o 20º termo

11. Dada a P.A. (0, 3, 6, 9,...), determine:

a) seu termo geral b) o 15º termo

12. Determine os cinco primeiros termos da sequência dada por $a_n = 1 + 3n$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Determine os oito primeiros termos da sequência definida por $a_n = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

14. A respeito da sequência definida por $a_n = 10 + 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, determine:

a) 0 10º termo b) a soma de seus cinco primeiros termos

15. Qual é o 72º múltiplo de 3?

16. Numa P.A., sabe-se que $a_1 + a_5 = 15$ e $a_3 + a_6 = 36$. Determine seu 1º termo e sua razão.

17. O quinto termo de uma sequência aritmética é 17 e o terceiro é 11. Determine o primeiro e o sétimo termos.

18. A sequência (6, 5 + x, y) é uma P.A. de razão 3. Qual é o 20º termo da P.A. (y, 2x,...)?

19. Para preencher as vagas num vestibular, uma faculdade decidiu adotar o seguinte critério: na 1ª chamada, são convocados 96 alunos; na 2ª, são convocados 84 alunos; na 3ª, 72, e assim por diante.

a) Quantos alunos serão convocados na 6ª chamada?
b) Quantas chamadas há nesse vestibular?

20. Interpole 5 meios aritméticos entre – 2 e 40.

21. Interpole dez meios aritméticos entre 5 e 49.

22. Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, qual é o sexto termo da P.A.?

23. Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre 15 e 160, de modo que a razão da interpolação seja igual a 5?

24. Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A. (-13, -7, -1,...).

25. Em relação à sequência dos números naturais ímpares, vamos calcular:

a) A soma dos cinquenta primeiros termos;
b) A soma dos *n* primeiros termos.

26. Determine a soma dos 50 termos iniciais da sequência dos inteiros positivos.

27. Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

28. Obtenha uma P.A. em que a soma dos primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo *n* natural.

29. Quantos termos da sequência aritmética (15,13,11,...) são necessários para perfazer $S_n = -36$?

30. O primeiro termo de uma sequência aritmética é –12, e o n-ésimo é 40.

Sendo a soma 196, achar a razão e o valor de n.

Gabarito

1. a, d, f

2. a) r = 11 crescente b) r = –4 decrescente c) $r = \frac{1}{4}$ crescente d) r = 0 constante
e) r = -9 decrescente f) r = b crescente

3. $a_{15} = 43$

4. $a_{18} = 63$

5. $a_{100} = 199$

6. r = 2

7. r = 3

8. $a_1 = 0$

9. $a_1 = 24$

10. a) $a_n = 2 + 3n$ b) $a_{20} = 62$

11. a) $a_n = 3n - 3$ b) $a_{15} = 42$

12. P.A. (4,7,10,13,16)

13. $\left(2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}\right)$

14. a) $a_{10} = 30$ b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 80$

15. $a_{72} = 213$

16. $a_1 = -\frac{13}{2}$ e r = 7

17. $a_1 = 5$ e $a_7 = 23$

18. $a_{20} = -64$

19. a) $a_6 = 36$ b) n = 8 chamadas

20. P.A. (- 2 ,5, 12, 19, 26, 33, 40)

21. P.A. (5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49)

22. $a_6 = 30$

23. k = 28

24. $S_{20} = 880$

25. a) $S_{50} = 2500$ b) $S_n = n^2$

26. $S_{50} = 1275$

27. $S_{180} = 98550$

28. P.A. (3,5,7,9,...)

29. n = 18

30. n = 14 e r = 4

Progressão Geométrica (P.G.)

3.1. Definição

Progressão geométrica (P.G.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. Esta constante q é chamada razão da Progressão Geométrica. Podemos calcular a razão da progressão, caso ela não esteja suficientemente evidente, dividindo entre si dois termos consecutivos.

$$\begin{cases} a_1 = k, k \in ¥ \\ a_n = a_{n-1}.q, q \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Exemplo: A sequência (6, -12, 24, -48, 96) é uma P.G. finita de cinco termos. Determine a razão.

Resolução: Temos que $a_1 = 6$ e $a_2 = -12$. Então:

$$q = \frac{-12}{6} = -2$$

3.2. Classificação

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

1ª) **Crescente**: É uma P.G. em que cada termo é maior que o anterior. Notemos que isto pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos: $q > 1$

Exemplo: A P.G. dada por (2, 4, 8, 16,...) é crescente com razão $q = 2$.

b) P.G. com termos negativos: $0 < q < 1$

Exemplo: A P.G. dada por (-1, -0.5, -0.25, -0.125,...) é crescente com razão $q=\frac{1}{2}$.

2ª) **Constante**: É uma P.G. em que cada termo é igual ao anterior. Notemos que isto ocorre em duas situações:

a) P.G. com termos todos nulos: $a_1 = 0$ e q qualquer.

Exemplo: A P.G. dada por (0, 0, 0, 0,...) é constante com todos os termos nulos.

b) P.G. com termos iguais e não-nulos: $q = 1$.

Exemplo: A P.G. dada por (5, 5, 5, 5,...) é constante com razão $q = 1$.

3ª) **Decrescente**: É uma P.G. em que cada termo é menor que o anterior. Notemos que isto pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos: $0 < q < 1$

Exemplo: A P.G. dada por (5, 2.5, 1.25, 0.625,...) é decrescente com razão $q= \frac{1}{2}$.

b) P.G. com termos negativos: $q > 1$

Exemplo: A P.G. dada por (-1, -2, -4, -8,...) é decrescente com razão $q = 2$.

4ª) **Alternante**: É uma P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

Exemplo: A P.G. dada por (2, -2, 2, -2,...).

5ª) **Estacionária**: É uma P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = ... = 0$. Isto ocorre quando $q = 0$.

Exemplo: A P.G. dada por (1, 0, 0, 0,...) é estacionária.

3.3. Termo Geral de uma P.G.

O termo geral de uma P.G. de ordem n é dado por:

$$a_n = a_1 . q^{n-1},$$

Onde:

- a_n é o termo geral;
- a_1 é o primeiro termo;
- n é o número de termos (até a_n);
- q é a razão.

Exemplo: Considere a P.G. (2, 4, 8, 16, 32,...). O enésimo termo desta P.G. representa os possíveis resultados (cara ou coroa) que podem aparecer quando lançamos n moedas. Determine o 8º termo.

Resolução:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$a_8 = 2.2^{8-1}$$
$$a_8 = 256$$

Portanto, se lançarmos oito moedas diferentes teremos 256 resultados possíveis.

3.4. Notações Especiais

Para obtenção de uma P.G. com três, quatro ou cinco termos, é muito prática a notação seguinte:

1ª) Para 3 termos; $\left(x, xq, xq^2\right)$ ou $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$.

2ª) Para 4 termos: $\left(x, xq, xq^2, xq^3\right)$.

3ª) Para 5 termos: $\left(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4\right)$.

Exemplo: Qual é o número que deve ser somado a 1,9 e 15 para que se obtenha, nessa ordem, três números em P.G.?

Resolução: Para que $(x + 1, x + 9, x + 15)$ seja uma P.G., devemos ter:

$$\frac{x+9}{x+1} = \frac{x+15}{x+9}$$

E, então:

$$(x + 9)^2 = (x + 1).(x + 15)$$
$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 16x + 15$$
$$2x = - 66$$
$$x = - 33$$

3.5. Propriedades dos Termos Geométricos

1) Dados três termos consecutivos de uma sequência geométrica, o termo central é a média geométrica entre o anterior e o seguinte. Isto é, se (a1, a_2, a_3,...,a_n, a_{n+1},...) é uma sequência geométrica,

$$|a_n| = \sqrt{(a_{n-1}.a_{n+1})}$$

Exemplo: Considere a P.G.(2, 4, 8, 16, 32)

$$|16| = \sqrt{(32).(8)}, \text{ pois } \sqrt{(32).(8)} = \sqrt{256} = 16 .$$

2) Dados dois termos quaisquer, a_n e a_m de uma sequência geométrica, o produto de quaisquer dois outros, equidistantes (mesma distância) desses, é igual ao produto deles. Isto é, se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{n+k}, ..., a_{n-k}, ..., a_m, ...\}$ é uma sequência geométrica:

$$a_{n+k}.a_{m-k} = a_n.a_m$$

Observação: Se n = 1, $a_{k+1} + a_{m-k} = a_1 . a_m$

Exemplo: Considere a P.G. (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320,...). Observemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 . a_5 = 5 . 80 = 400 \\ a_2 . a_4 = 10 . 40 = 400 \end{array}\right\} a_1 . a_5 = a_2 . a_4 \quad \text{(note que } 1 + 5 = 2 + 4)$$

3.6. Interpolação Geométrica

Interpolar K meios geométricos entre os números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.G. é necessário calcular a razão. Assim, temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$b = a . q^{k+1}$$

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Exemplo: Interpolar oito meios geométricos (reais) entre 5 e 2560.

Resolução: Formemos uma P.G. com dez termos onde $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$. Temos:

$$a_{10} = a_1 . q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[9]{512} = 2$$

Então a P.G. procurada é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560).

3.7. Soma dos Termos de uma P.G. Finita

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma P.G. de razão $q \neq 1$. Então a soma dos n primeiros termos é dado por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \; q \neq 1$$

Exemplo: Vamos calcular o valor da soma dos dez primeiros termos da P.G. (80, 40, 20...).

Resolução: Sabemos que: $a_1 = 80$ e $q = \frac{1}{2}$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} \Rightarrow S_{10} = \frac{80\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow S_{10} = \frac{5115}{32}$$

Exemplo: Quantos termos da P.G. (2, 6, 18...) devem ser considerados a fim de que a soma resulte em 19.682?

Resolução: Queremos determinar *n* tal que S_n = 19.682. Como $a_1 = 2$ e $q = 3$, assim:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 19682 = \frac{2.(3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 3^n - 1 = 19682$$

$$\Rightarrow 3^n = 19683 \Rightarrow 3^n = 3^9 \Rightarrow n = 9$$

3.8. Por que Progressão Geométrica?

Dados os números reais a, r, com 0 < r < 1, seja

$$S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$$

a soma dos termos da progressão geométrica ilimitada cujo primeiro termo é a e cuja razão é *r*. Temos:

$$S = a + r(a + ar + ar^2 + \ldots) = a + rS$$

donde $S - rS = a$ e daí

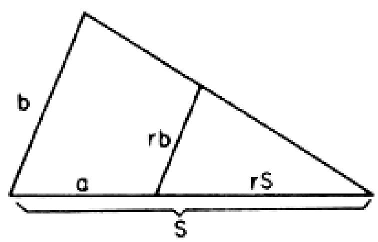
$$S = \frac{a}{1-r}$$

Não há geometria alguma nesse raciocínio, embora a progressão se chame *geométrica*. Mas, dados a > 0 e 0 < r < 1, podemos construir geometricamente a soma $S = a + ar + ar^2 + \ldots$ do seguinte modo:

Tomamos um segmento de comprimento *a* e, a partir de uma de suas extremidades, outro segmento com comprimento *b* arbitrário. Na outra extremidade, traçamos um segmento paralelo a *b*, de comprimento *rb*.

A reta que liga as extremidades livres dos segmentos *b* e *rb* encontra o prolongamento de *a* num ponto que dista exatamente *S* da primeira extremidade de *a*.

A figura ao lado diz mais do que as palavras acima.



Explicação: os triângulos de bases *b* e *rb* na figura ao lado são semelhantes. A razão de semelhança é *r*. Logo o segmento adjacente a a mede *rS*. Ou seja,

$S = a + rS$, donde

$$S = \frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \ldots$$

Teste o seu conhecimento

1. Das sequências abaixo, assinale aquelas que representam Progressões Geométricas.

a) (4, 12, 36, 108,...)
b) (- 2, 8, - 32, 128,...)
c) (3, 9, 15, 21,...)
d) ($3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$, 12,...)
e) (1, -1, 1, -1, 1, ...)
f) ($\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, ...)

2. Calcule a razão de cada uma das Progressões Geométricas e, em seguida, classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (1, 4, 16, 64, ...)
b) (2, 2, 2, 2,...)
c) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{27}{2},\ldots\right)$
d) $\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{12},\frac{1}{48},\frac{-1}{192},\ldots\right)$
e) (1, -2, 4, -8, ...)
f) (- 3, - 6, - 12,...)

3. Escreva as seguintes Progressões Geométricas:

a) de seis termos, sendo $a_1 = 4$ e $q = \frac{1}{4}$;

b) de cinco termos, sendo $a_1 = \frac{3}{8}$ e $q = 2$;

c) de cinco termos, sendo $a_1 = -3$ e $q = \frac{2}{3}$;

d) de quatro termos, sendo $a_1 = -1$ e $q = -5$.

4. Qual é o quinto termo da P.G. (20, 10, 5,...)?

5. Determine o décimo termo da P.G. (1, 2, 4,...).

6. Determine o primeiro termo da P.G. em que $a_8 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

7. Qual a razão de uma P.G. em que $a_1 = -3$ e $a_9 = -768$?

8. Qual é a ordem do termo igual a 192 na P.G. (3, 6, 12,...)?

9. Qual é a ordem do termo igual a 125 na P.G. $\left(\frac{1}{25},\frac{1}{5},1,\ldots\right)$?

10. Determine o valor de x de modo que a sequência (6, x, 24) forme, nessa ordem, uma P.G. crescente.

11. Dada uma P.G. finita (a_1, a_2, a_3,...., a_{10}) de modo que $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$, pergunta-se se é correta a igualdade $(a_{10})^{\frac{1}{8}} = 3.(2)^{\frac{1}{8}}$. Justifique sua resposta.

12. Ache três números em P.G. crescente, sendo 31 a sua soma e 125 o seu produto.

13. A soma de três números em P.G. é 35 e a diferença entre o primeiro e o terceiro é 15. Determine os três números.

14. Escreva a P.G. crescente na qual $a_1 + a_2 = 9$ e $a_1 + a_3 = 15$.

15. Insira seis meios geométricos reais entre 640 e 5.

16. Interpole cinco meios geométricos entre $\frac{2}{3}$ e 486.

17. Quantos meios se deve intercalar entre 78.125 e 128 para obter uma P.G. de razão $\frac{2}{5}$?

18. Calcule a soma dos nove primeiros termos da P.G (3, 6, 12...).

19. Calcule a soma dos cinco primeiros termos de uma P.G., sabendo que o quinto termo é 162 e que a razão é igual a 3.

20. Determine a soma dos seis primeiros termos de uma P.G. em que o sexto termo é 160 e a razão é igual a 2.

21. Determine a soma dos dez primeiros termos de uma P.G. em que o décimo termo é igual a 1 e a razão é igual a -1.

22. Determine x de modo que a sequência $\left(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x-1}\right)$ seja uma P.G.

23. Determine o número de termos de uma P.G. na qual $a_1 = 4$, $q = 2$ e $S_n = 2044$.

24. Determine o número de termos de uma P.G. na qual $a_1 = 3$ e $S_n = 3069$ e eq=2.

25. Que número deve ser somado a 2, 4 e 7, nessa ordem, a fim de obtermos uma P.G.?

26. A sequência (x, 3, 7) é uma P.A. e a sequência (x - 1, 6, y) é uma P.G. Quais são os valores de x e y?

27.Se a sequência (a, b, c) é ao mesmo tempo P.A. e P.G., mostre que, então, necessariamente, a = b = c.

Gabarito

1. a, b, d, e

2. a) q = 4 crescente; b) q = 1 constante; c) q = 3 crescente;
d) $q = -\frac{1}{4}$ não tem classificação; e) q = - 2 não tem classificação;
f) q = 2 decrescente.

3.
a) P.G. $\left(4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}\right)$; b) P.G. $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6\right)$;

c) P.G. $\left(-3, -2, \frac{-4}{3}, \frac{-8}{9}, \frac{-16}{27}\right)$; d) P.G. (-1, 5, -25, 125).

4. $a_5 = 1,25$

5. $a_{10} = 512$

6. $a_1 = 128$

7. q = +2 ou q = - 2.

8. Sétimo termo, ou seja, n = 7.

9. Sexto termo, ou seja, n = 6.

10. x = 12

11. A igualdade é falsa.

12. P.G. (1, 5, 25)

13. P.G. (5, 10, 20)

14. P.G. (3, 6, 12,...).

15. $q = \frac{1}{2}$.

16. P.G. $\left(\frac{2}{3}, 2, 6, 18, 54, 162, 486\right)$.

17. 6 meios.

18. $S_9 = 1533$

19. $S_5 = 242$

20. $S_6 = 315$

21. $S_{10} = 0$

22. 4/3

23. n = 9

24. n=10

25. n = 2

26. x = -1 e y = -18

27. A igualdade é verificada.

Contagem

4.1. Princípio Fundamental da Contagem

Princípio Fundamental da Contagem é o mesmo que a Regra do Produto, um princípio combinatório que indica quantas vezes e as diferentes formas que um acontecimento pode ocorrer. O acontecimento é formado por dois estágios caracterizados como sucessivos e independentes:

- O primeiro estágio pode ocorrer de *m* modos distintos.
- O segundo estágio pode ocorrer de *n* modos distintos.

Desse modo, podemos dizer que o número de formas diferentes que pode ocorrer em um acontecimento é igual ao produto *m.n*.

Cada um dos exemplos a seguir mostra todas as possibilidades de ocorrer um experimento.

Exemplo 1: Quantos são os números naturais de dois algarismos múltiplos de 5?

Resolução: Como zero à esquerda de um número não é significativo, para que tenhamos um número natural com dois algarismos, ele deve começar com um dígito de 1 a 9 e, portanto, temos nove possibilidades. Mas para que seja múltiplo de 5, o número deve terminar em 0 ou 5. Portanto, temos apenas duas possibilidades. Dessa forma,

$$9 \times 2 = 18,$$

Ou seja, são 18 os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5.

Exemplo 2: Ao lançarmos uma moeda e um dado temos as seguintes possibilidades:

Moeda: cara ou coroa (duas possibilidades)
Dado: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (seis possibilidades)

Diante disso, vemos que o evento tem duas etapas com duas possibilidades em uma e seis em outra, totalizando 2 x 6 = 12 possibilidades.

Exemplo 3: Com cinco homens e cinco mulheres, de quantos modos pode-se formar um casal?

Resolução: Formar um casal equivale a tomar as decisões:

D1: Escolha do homem (cinco modos)
D2: Escolha da mulher (cinco modos)

Portanto, há 5 x 5 = 25 modos de formar um casal.

Exemplo 4: Marina tem cinco blusas e duas saias. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir com essas roupas?

Resolução: Variar as blusas com as saias equivale às opções:

D1: Escolher uma blusa (5 modos)
D2: Escolher uma saia (2 modos)

Portanto, há 5 x 2 = 10 modos diferentes de se vestir de maneira diferente.

Exemplo 5: Renato, José e Cristina disputam um torneio de xadrez no qual são atribuídos prêmios ao campeão e ao vice-campeão. Quais são as premiações possíveis?

Resolução: Premiar um campeão e um vice-campeão entre os três participantes equivale às possibilidades:

D1: Premiar um campeão (três possibilidades)
D2: Premiar um vice-campeão (duas possibilidades, pois temos que descartar o campeão)

Portanto, existem 3 x 2 = 6 premiações possíveis. Tais possibilidades estão descritas abaixo:

Campeão	Vice-campeão
Renato ----------	José
Renato ----------	Cristina
José -------------	Renato
José -------------	Cristina
Cristina ----------	Renato
Cristina ----------	José

Generalização: Um acontecimento é formado por *k* estágios sucessivos e independentes, com $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ possibilidades para cada. O total de maneiras distintas de ocorrer este acontecimento é $n_1.n_2.n_3. ... .n_k$.

Exemplo 6: Em quantas ordens diferentes quatro pessoas podem se sentar num sofá de quatro lugares?

Resolução: Temos as seguintes possibilidades:

-Primeiro lugar: 4 possibilidades.
-Segundo lugar: 3 possibilidades, descartando a pessoa que se sentou primeiro lugar.
-Terceiro lugar: 2 possibilidades, descartando as pessoas que se sentaram no primeiro e no segundo lugares.
-Quarto lugar: 1 possibilidade, descartando as pessoas que se sentaram no primeiro, segundo e terceiro lugares.

Assim,

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Logo, existem 24 maneiras diferentes de quatro pessoas se sentarem em quatro lugares distintos.

4.2. Fatorial

Seja $n \geq 2$ um número natural, definimos o fatorial de um número do seguinte modo:

$$n! = n.(n-1).(n-2). ... .1,$$

onde:

- a leitura do símbolo *n!* é: "*n* fatorial"
- *n!* é o produto de todos os números naturais de 1 até *n*;
- Definimos: 0! = 1 e 1! = 1.

Exemplo: Calcule:

a) 2! = 2.1 = 2.
b) 3! = 3.2.1 = 6.
c) 2! + 3! = 2.1 + 3.2.1 = 2 + 6 = 8.
d) $\frac{8!}{9!} = \frac{8!}{9.8!} = \frac{1}{9}$, simplificando o 8! do numerador com o do denominador.

e) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$, simplificando (n - 1)! do numerador com o denominador.

4.3. Um fato curioso

A história começa quando, no outro dia, ouvia um colega, professor de História, conversando com os alunos de uma turma da 3.ª série do ensino médio. Todos eleitores, naturalmente. Perguntava esse meu colega em quem eles votariam no segundo turno nas diversas hipóteses que ele iria apresentar.

Depois de muita confusão e nenhuma conclusão, ele resolveu considerar apenas os três candidatos mais cotados, que chamarei aqui de *A*, *B* e *C*. O meu colega perguntou, então, para a turma em quem eles votariam se *A* e *B* fossem para o segundo turno. E a maioria da turma votaria em *A*. Em seguida, ele perguntou em quem votariam se *B* e *C* fossem para o segundo turno. E agora a maioria da turma votaria em *B*. Dando-se por satisfeito, o professor resolveu encerrar a pesquisa e começar a aula, mas foi interpelado por um aluno que lhe perguntou se ele não iria propor a hipótese de *A* e *C* irem para o segundo turno. Esse colega respondeu que não havia necessidade dessa pergunta porque naturalmente A ganharia "de barbada".

A aula começou e eu me retirei para pensar neste caso. Na realidade, por incrível que pareça, o professor estava errado. Ele não poderia concluir que a maioria da turma deveria preferir *A* a *C*. Para mostrar que o raciocínio do colega é falso, imaginemos que num grupo de pessoas, a disputa entre *A*, *B* e *C* seja equilibrada da seguinte forma:

1/3 das pessoas desse grupo tem preferência por *A*, *B* e *C* nesta ordem, 1/3 das pessoas tem preferência por *B*, *C* e *A* nesta ordem e o restante por *C*, *A* e *B* nesta ordem.

Veja então o quadro abaixo:

	1.°	**2.°**	**3.°**
1/3	*A*	*B*	*C*
1/3	*B*	*C*	*A*
1/3	*C*	*A*	*B*

Se este grupo for submetido às perguntas feitas pelo meu caro colega, veremos que, na decisão entre *A* e *B*, 2/3 preferirão *A*; tendo que optar entre *B* e *C*, 2/3 preferirão *B*; mas, supreendentemente, se a decisão for entre *A* e *C*, 2/3 preferirão *C*. O aluno está, portanto, certo, e a terceira pergunta deveria ter sido feita.

Temos aqui um exemplo de uma relação que, intuitivamente, esperamos ser transitiva, mas que, na realidade, não é.

Teste os seus Conhecimentos

1. Em um baile há 12 moças e 8 rapazes. Quantos casais podem ser formados?

2. Paulo vai a um clube no qual existem 4 portas de entrada que dão acesso a 2 elevadores. Ele pretende ir ao 6º andar. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

3. Um rapaz possui 4 bermudas e 3 camisas. De quantos modos diferentes ele pode se vestir com essas roupas?

4. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar num sofá de 5 lugares?

5. Uma pessoa possui 8 envelopes diferentes e 5 selos. De quantos modos diferentes ela pode enviar uma carta utilizando 1 envelope e 1 selo?

6. Quantos números ímpares de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal?

7. Quantos números naturais pares de dois algarismos podem ser formados?

8. Sabendo que números de telefone não começam com 0 e nem com 1, calcule quantos diferentes números de telefone podem ser formados com 7 algarismos.

9. Uma moeda é lançada três vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

10. Calcule o valor dos números fatoriais:

a) 7!
b) 2! + 3!
c) 6!
d) 2! 3!
e) 0! 5!

11. Simplifique as expressões:

a) $\frac{10!}{7!}$ b) $\frac{15!}{13!}$ c) $\frac{6!}{5!2!}$ d) $\frac{8!4!}{6!}$

e) $\frac{x!}{(x-2)!}$ f) $\frac{(n+1)!}{n!}$ g) $\frac{(n-1)!+(n-2)!}{n!}$

12. Se $(x + 1)! = 3(x!)$, então x é igual a:

a)1 b)2 c)3 d)4 e)5

Gabarito

1. 48 casais.

2. 8 maneiras diferentes.

3. 12 modos diferentes.

4. 60 maneiras.

5. 40 modos.

6. 45 números.

7. 45 números.

8. 8×10^6

9. 8 sequências possíveis.

10. a) 5040; b) 8; c) 720; d) 12; e) 120;

11. a) 720; b) 210; c) 3; d) 1344; e) $x(x - 1)$; f) $n + 1$; g) $\frac{1}{n-1}$.

12. letra b)

Análise Combinatória

5.1. Introdução

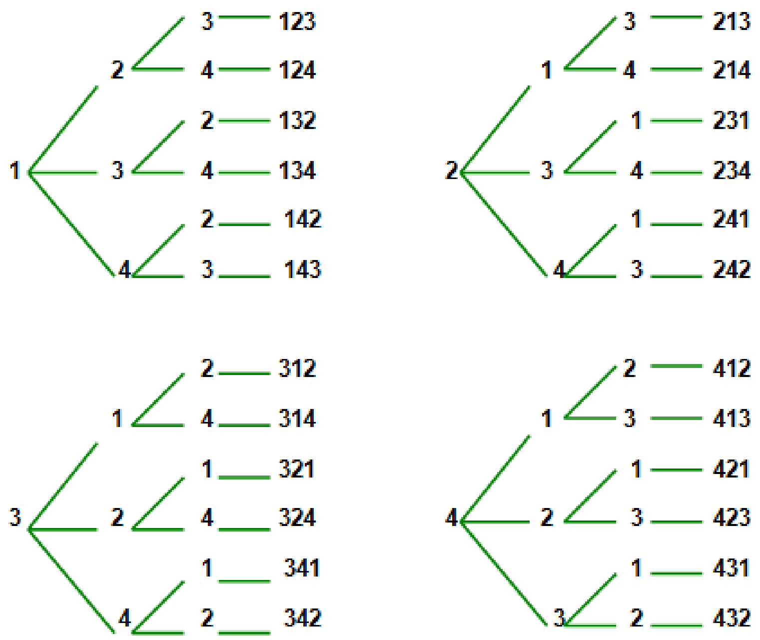
Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem.

A análise combinatória tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar os elementos de um conjunto, ou que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo esses elementos agrupamentos formados sob certas condições.

Problema: Dado o conjunto B dos algarismos B = {1, 2, 3, 4}. Qual a quantidade de números naturais de três algarismos que podemos formar utilizando os elementos do grupo B?

Esse é um tipo de problema de análise combinatória, pois teremos que formar agrupamentos, nesse caso, formar números de 3 algarismos, ou seja, formar agrupamentos com os elementos do conjunto B tomados de 3 em 3.

Veja como resolveríamos esse problema sem a utilização de critérios ou fórmulas que o estudo da análise combinatória pode nos fornecer.



O esquema construído acima representa todos os números naturais de 3 algarismos que podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4. Portanto, é possível formar 24 agrupamentos.

Para descobrir a quantidade de agrupamentos possíveis não é necessário montar todo esse esquema. Basta utilizar o estudo da análise combinatória que divide os agrupamentos em Arranjos simples, Combinações simples, Permutações simples e Permutações com elementos repetidos. Cada uma dessas divisões apresenta uma fórmula e uma maneira diferente de identificação.

À primeira vista, pode parecer desnecessária a existência desses métodos. De fato, é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Caso contrário, esse trabalho torna-se praticamente impossível sem o uso de métodos especiais.

Vejamos alguns exemplos. Usaremos a notação $n(M)$ para indicar os números de elementos de um conjunto M.

Exemplo 1: A é o conjunto dos números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 2, 3 e 4.

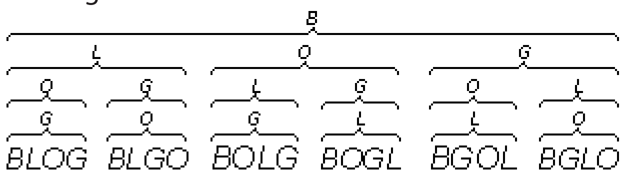
A = {23, 24, 32, 34, 42, 43}, então $n(A) = 6$.

Exemplo 2: B é o conjunto das sequências de letras que se obtêm, mudando-se a ordem das letras da palavra ITA (ou seja, os anagramas da palavra ITA).

B = {ITA, IAT, AIT, ATI, TAI, TIA}, então n(B) = 6.

Exemplo 3: Determinar quantos anagramas podem ser formados com o uso das quatro letras da palavra BLOG.

Resolução: Uma das formas de se demonstrar que existem 6 possibilidades de anagramas iniciados com a letra B (BLOG, BLGO, BOLG, BOGL, BGOL e BGLO) é apresentada no diagrama abaixo:



O uso do mesmo raciocínio para as demais letras (L, O e G) nos permite concluir que o número de possibilidades é igual a 24 (4 x 6).

5.2. Permutação Simples

Permutação simples são os agrupamentos de um determinado número de elementos variando apenas sua ordem.

O número de agrupamentos de uma permutação simples de n elementos é dado por $n!$, ou seja, $P_n = n!$.

Exemplo 1: Considere o conjunto A = {x, y, z}. Determine a permutação dos 3 elementos distintos.

Resolução: Permutar os 3 elementos distintos de A = {x, y, z} é determinar todos os agrupamentos possíveis com os 3 elementos, variando a ordem. Então, temos:

(x, y, z); (x, z, y); (y, x, z); (y, z, x); (z, x, y); (z, y, x).

Observe que o número de permutações simples é igual a 6. Note que para a primeira posição há três possibilidades (qualquer uma das letras), para a segunda sobram duas letras (2 possibilidades) e para a terceira posição temos só uma letra ainda não usada. Portanto, o número de permutações simples de 3 elementos no exemplo acima é:

$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

Exemplo 2: Qual o número de anagramas da palavra LÁPIS, ou seja, quantas palavras com as mesmas letras da palavra LÁPIS podem ser formadas?

Resolução: Como a palavra LÁPIS tem 5 letras, basta calcular:

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Assim, o número de anagramas da palavra LÁPIS é 120.

Exemplo 3: Da palavra LIVRO:

a) Quantos são os anagramas que começam com vogal?

Resolução: Começando com vogal, pode ser:

I __ __ __ __ ou

O __ __ __ __

Então,

$2.P_4 = 2.(4.3.2.1) = 48$

Onde o número 2 indica a quantidade de vogais que pode iniciar a palavra e P_4 a permutação das outras 4 letras. Assim, são 48 os anagramas que começam com vogal.

b) Quantos são os anagramas que começam com consoante?

Resolução: Começando com consoante, pode ser:

L __ __ __ __

V __ __ __ __

R __ __ __ __

Então,

$3.P_4=3.(4.3.2.1) = 72$,

Onde o número 3 indica a quantidade de consoantes que pode iniciar a palavra e P_4 a permutação das outras 4 letras. Assim, são 72 os anagramas que começam com consoante.

5.3. Permutação com Elementos Repetidos

Se formos fazer permutações com n elementos, mas existe um elemento repetido 'a' vezes, outro 'b' vezes, outro 'c' vezes, etc., o número de possibilidades de permutações será dado por:

$$P_n^{(a,b,c)} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

Exemplo: Determine o número de anagramas (combinações de letras que formam palavras com ou sem sentido) que podemos criar com PATA e com MACACA.

Resolução:

a) A palavra PATA tem 4 letras com a letra A se repetindo 2 vezes, então:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 4.3 = 12$$

Assim, são **12** os anagramas com a palavra PATA.

b) A palavra MACACA é tem 6 letras, com a letra A se repetindo 3 vezes e a letra C se repetindo 2 vezes, então:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6.5.4.3!}{3!2.1} = \frac{6.5.4}{2} = 60$$

Assim, são 60 os anagramas com a palavra MACACA.

5.4. Arranjo Simples

A análise combinatória estuda dois tipos de agrupamentos: Arranjos e combinações. Arranjos são agrupamentos que a ordem dos seus elementos faz a diferença.

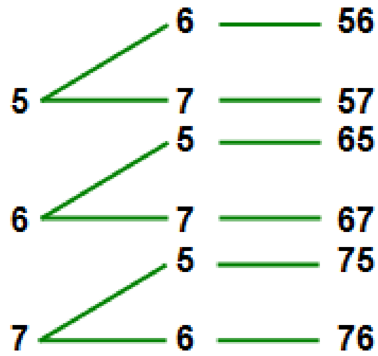
Exemplo: Os números de três algarismos formados pelos elementos {1, 2, 3} são:

312, 321, 132, 123, 213, 231

Esse agrupamento é um arranjo, pois a ordem dos elementos 1, 2 e 3 diferem. E é considerado simples, pois os elementos não se repetem.

O arranjo simples é todo agrupamento de 'p' elementos distintos, podendo variar a ordem em que aparecem.

Exemplo: Dado o conjunto B = {5, 6, 7}, veja os possíveis agrupamentos formados com 2 elementos de B.



Então, os agrupamentos formados com 2 elementos do conjunto B são: 56, 57, 65, 67, 75, 76. Tal agrupamento é formado por arranjos simples pelos elementos do conjunto B. Neste exemplo, percebemos que é possível formar 6 arranjos, quantidade que pode ser representada da seguinte forma: (três elementos distintos formados de dois a dois).

O número total de arranjos de 'n' elementos e taxa 'p' é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 1: Quantos anagramas de três letras distintas podem ser formados pelo nosso alfabeto (com 26 letras)?

Resolução: Como as letras não podem se repetir, teremos, então:

$$A_{26,3} = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = \frac{26.25.24.23!}{23!} = 26.25.24 = 15600$$

Assim, são 15600 os anagramas que podem ser formados.

Exemplo 2: De um baralho de 52 cartas, 3 delas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis de se obter?

Resolução: Notemos que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x,y,z), onde *x* é a 1ª carta extraída, *y* a 2ª carta e *z* a 3ª.Observemos que x,y,z são todas distintas, visto que a extração é feita sem reposição.

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = \frac{52.51.50.49!}{49!} = 52.51.50 = 132600$$

Assim, podemos ter 132600 sequências de cartas possíveis.

5.5. Arranjo com Elementos Repetidos

Seja M um conjunto com *m* elementos, isto é, M = {a_1, a_2, a_3... a_m}. Chamamos de arranjo com repetição de *m* elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos e denotamos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição formados, cuja fórmula é dada abaixo:

$$(AR)_{m,r} = m^r$$

Exemplo: Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma delas é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida, outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?

Resolução: Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) onde x e y são números naturais, M = {V, B, A}. Logo, o número de pares é:

$$(AR)_{3,2} = 3^2 = 9$$

Assim, são 9 as sequências de cores observadas.

5.6. Combinação

Combinação são todos os agrupamentos de *p* elementos que podemos formar com *n* elementos distintos, ou seja, só é usada quando não há repetição de membros dentro do conjunto.

O número total de agrupamentos de 'n' elementos é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ sendo } p \le n$$

Exemplo 1: De quantas formas distintas podemos escolher dois elementos do conjunto A = {2, 4, 6}?

Resolução: Como queremos elementos distintos, então:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3.2!}{2!1!} = \frac{3}{1} = 3$$

Assim, é possível escolher 3 elementos distintos, sendo eles: ab, ac e bc.

Exemplo 2: Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de 10 funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Resolução: Note que cada comissão é um subconjunto de três elementos. Então:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10\text{-}3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8.7!}{3!7!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = \frac{720}{6} = 120$$

Assim, são 120 as comissões que podem ser formadas.

Exemplo 3: Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Resolução: Para formar a comissão devemos escolher 3 dos homens e 2 das mulheres. O número de homens é dado por:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

E o número de mulheres:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2!2!} = \frac{12}{2} = 6$$

Sendo o número de comissões dado por:

$$C_{5,3}.C_{4,2} = 10.6 = 60$$

Assim, são 60 as comissões que podem ser formadas com 3 homens e 2 mulheres.

5.7. Analisando a Sorte

"Se eu estiver disposto a jogar 28 reais, é melhor fazer um único jogo de 8 dezenas ou vinte e oito jogos de 6 dezenas?"

Essa é uma questão interessante, pois, embora as duas formas de jogar sejam equivalentes (supondo 28 jogos distintos de 6 dezenas) no que diz respeito à sena, isso não é verdade com relação à quadra e à quina. De fato, com um único jogo de 8 dezenas existirão $\binom{8}{5}.\binom{52}{1} = 2912$ resultados possíveis que darão o prêmio da quina ao apostador. Com um único jogo de 6 dezenas, o apostador terá $\binom{6}{5}.\binom{54}{1} = 324$ resultados contendo uma quina.

Se os 28 jogos não tiverem nenhuma quina em comum, o total de resultados favoráveis será igual a $28x324 = 9072$. A probabilidade de acertarmos uma quina com o segundo sistema é mais do que três vezes maior do que com o primeiro. Essa diferença é, pelo menos parcialmente, compensada pelo fato de que, acertando uma quina com o jogo de 8 dezenas, receberemos três vezes o valor do prêmio. Os mesmos cálculos efetuados para a quadra mostram que, com um jogo de 8 dezenas, nós teremos 92.820 resultados favoráveis e com 28 jogos de 6 dezenas (que não tenham quadras em comum) nós teremos 601.020 resultados favoráveis, o que nos dá uma probabilidade que é aproximadamente 6,5 vezes maior. Uma vez mais vale a pena observar que, se acertarmos a quadra com o jogo de 8 dezenas, receberemos 6 vezes o valor do prêmio.

Teste o seu conhecimento

1. Da palavra ADESIVO;

a) quantos são os anagramas que podemos formar com as letras SI juntas e nessa ordem?

b) quantos são os anagramas que podemos formar começando com a letra D e terminando com a letra V?

2. Quantos anagramas da palavra FUVEST possuem as vogais juntas?

3. De quantos modos 6 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras, em fila?

4. Os anagramas da palavra EDUCATIVO que começam com vogal e terminam com consoante são em número de:

a) P_9 b) P_7 c) $P_7.P_5.P_4$ d) $2.P_7$ e) $20.P_7$

5. Qual é o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra URUGUAI?

6. De quantos modos podemos estacionar 20 automóveis em 3 garagens, sabendo que na primeira cabem 10 automóveis; na segunda, 6, e na terceira, 4?

7. De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 e um de 3 objetos?

8. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}?

9. Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes as 2 pessoas podem ocupar esses lugares?

10. Joana deseja pintar a palavra MANIA em um cartaz de publicidade, usando uma cor em cada letra. De quantos modos isso pode ser feito, se ela dispõe de 8 cores de tinta?

11. Com o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, quantos números pares de 4 algarismos distintos podemos formar?

12. Quantas comissões de 4 mulheres e 3 homens podem ser formadas com 10 mulheres e 8 homens?

13. Numa grande competição de Fórmula 1, participarão 20 pilotos e somente os 6 primeiros marcarão pontos.Quantas são as possibilidades de classificação nos 6 primeiros lugares?

14. Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

15. Seis pessoas decidem formar 2 comissões com 3 pessoas cada. De quantas formas diferentes isso pode ser feito?

16. Num grupo de 10 professores de Matemática, 4 irão a um concurso. Calcular quantos grupos será possível formar.

17. Quantos grupos diferentes de 4 lâmpadas podem ficar acesos num galpão que tem 10 lâmpadas?

18. Quantos subconjuntos de 4 elementos possuem um conjunto de 6 elementos?

19. Quantos produtos de 2 fatores podemos obter com os divisores naturais do número 12?

20. De uma baralho de 52 cartas, são extraídas 4 cartas sucessivamente e sem reposição.Qual o número de resultados possíveis, se não levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

Gabarito

1. a) 720 anagramas b) 120 anagramas
2. 240 anagramas
3. 720 modos
4. letra e)
5. 840 anagramas
6. 20!10!6!4!
7. 56 modos
8. 60 números
9. 42 maneiras
10. 6720 maneiras
11. 360 números
12. 11760 comissões
13. 20!14!
14. 72 números
15. 20 maneiras
16. 210 grupos
17. 210 grupos
18. 15 subconjuntos
19. 15 produtos
20. 270725 resultados

Trigonometria

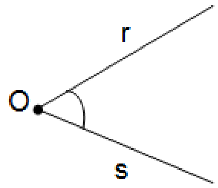
6.1. Introdução

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* (três), *gonos* (ângulos) e *metron* (medir). Daí, vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos. Assim, pelo estudo da Trigonometria, podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (*lados e ângulos*). Introduzimos, aqui, alguns conceitos relacionados com a Trigonometria no triângulo retângulo.

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade, ela já era usada para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns. Com o uso de triângulos semelhantes, podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre ou de uma pirâmide, a distância entre duas ilhas, o raio da terra e a largura de um rio, entre outras.

6.2. Ângulos

Um ângulo é caracterizado por um par de semirretas de origem no mesmo ponto.



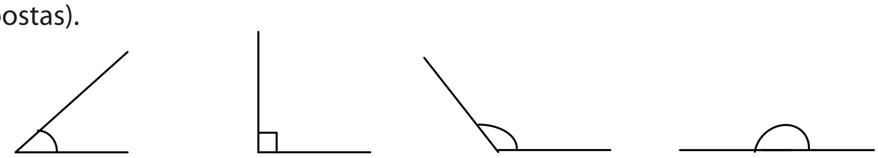
- Vértice O;
- ângulo rÔs ou sÔr;
- lados formados pelas semiretas Or e Os;

A unidade usual de medida de ângulo, de acordo com o sistema internacional de medidas, é o grau, representado pelo símbolo º.

Temos que 1º (grau) equivale a 60' (minutos) e 1' equivale a 60''(segundos).

Os ângulos podem ser classificados como:

- *Ângulo Nulo*: é um ângulo de medida 0º (seus lados são semirretas coincidentes);
- *Ângulo Agudo*: é um ângulo de medida entre 0º e 90º;
- *Ângulo Reto*: é um ângulo de medida 90º;
- *Ângulo Obtuso*: é um ângulo de medida entre 90º e 180º;
- *Ângulo Raso*: é um ângulo de medida 180º (seus lados são semirretas opostas).



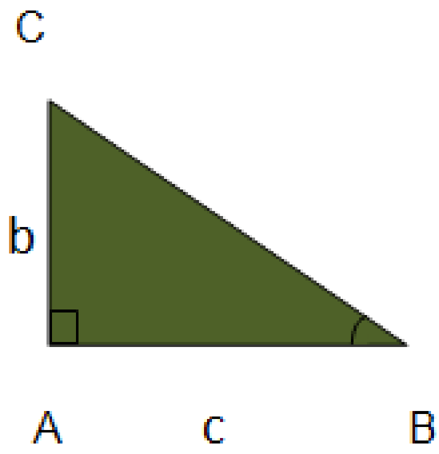
agudo reto obtuso raso

- Quando dois ângulos somam 90º, eles são chamados *ângulos complementares*;,

- quando dois ângulos somam 180º, eles são chamados *ângulos suplementares*.

6.3. Triângulos Retângulos - Elementos Principais

Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto, ou seja, igual a 90°. Podemos estabelecer razões entre as medidas dos seus lados: *catetos* (que formam o ângulo reto) e a *hipotenusa* (que se opõe ao ângulo reto). Consideremos um triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$ e um ângulo agudo $\hat{B}$.



Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

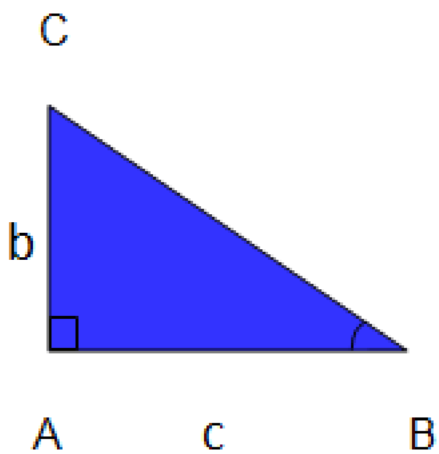
- Lados: $\mathbf{AB}, \mathbf{BA}, \mathbf{AC}$;
- Ângulos internos: $\mathbf{B\hat{A}C}, \mathbf{A\hat{B}C}, \mathbf{A\hat{C}B}$;
- Medidas de ângulos: $\hat{\mathbf{A}}$ = medida de $\mathbf{B\hat{A}C}$
  $\hat{\mathbf{B}}$ = medida de $\mathbf{A\hat{B}C}$
  $\hat{\mathbf{C}}$ = medida de $\mathbf{A\hat{C}B}$
- Medidas de lados: a = medida de BC
  b = medida de AC
  c = medida de AB

As medidas (na mesma unidade) a, b e c são, respectivamente, da hipotenusa, do cateto oposto a $\hat{\mathbf{B}}$ e do cateto adjacente a $\hat{\mathbf{B}}$.

Observação: Os nomes catetos e hipotenusa são usados apenas em triângulos retângulos.

6.4. O Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:



Em outras palavras, o Teorema de Pitágoras nos diz que:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

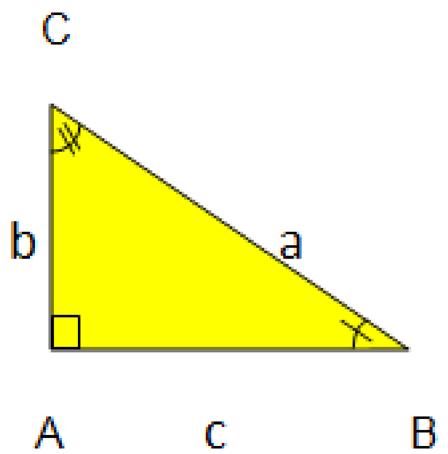
Exemplo: Os catetos de um triângulo retângulo medem 8cm e 6cm. Quanto mede a hipotenusa?

Resolução: Trata-se de um triângulo retângulo, sendo os catetos b=8 cm e c=6 cm, calculamos a hipotenusa "a" aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

6.5. Seno, Cosseno e Tangente no Triângulo Retângulo

Num triângulo retângulo podemos estabelecer razões entre as medidas dos seus lados: catetos (que formam o ângulo reto), hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto) e ângulos. Para isso, considere o triângulo retângulo abaixo:



1) **Seno de um ângulo agudo:** O seno (sen) de um ângulo agudo é dado pelo quociente (razão) entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa, ou seja, se considerarmos um ângulo *α*, obtemos a seguinte relação:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No triângulo acima temos:

$$\text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \text{ e } \text{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}$$

O seno de um determinado ângulo agudo não depende do particular triângulo retângulo tomado para calculá-lo. É importante observar que cada *ângulo agudo* corresponde a um único valor do seno e, reciprocamente, a cada valor do seno corresponde um único ângulo agudo.

2) **Cosseno de um ângulo agudo:** Num triângulo retângulo, o cosseno (cos) de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa, ou seja, considere um ângulo *α*, obtemos então:

$$\text{cosseno}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No triângulo retângulo acima temos:

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \text{ e } \cos\hat{C} = \frac{b}{a}$$

O cosseno de determinado ângulo agudo também não depende do particular triângulo retângulo tomado para calculá-lo e cada *ângulo agudo* corresponde a um único valor do cosseno e, reciprocamente, a cada valor do cosseno corresponde um único ângulo agudo.

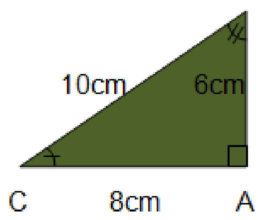
3) **Tangente de um ângulo agudo**: Num triângulo retângulo, a tangente (tg) de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a esse ângulo. Considerando um ângulo *α*, obtemos então:

$$\text{tangente}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

No triângulo retângulo acima tiramos que:

$$tg\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{sen\hat{B}}{cos\hat{B}} \text{ e } tg\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{sen\hat{C}}{cos\hat{C}}$$

Exemplo 1: No triângulo retângulo ABC de catetos b = 8 cm e c = 6 cm e hipotenusa a = 10 cm, temos para o ângulo agudo C e B, respectivamente:

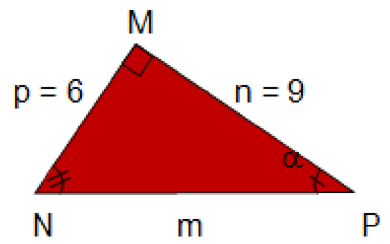


$$sen\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad sen\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{8}{10} = 0,8 \qquad cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$tg\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{6}{8} = 0,75 \qquad tg\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{8}{6} = 1,333...$$

Exemplo 2: Determine o seno, cosseno e tangente do ângulo *α* do triângulo MNP.



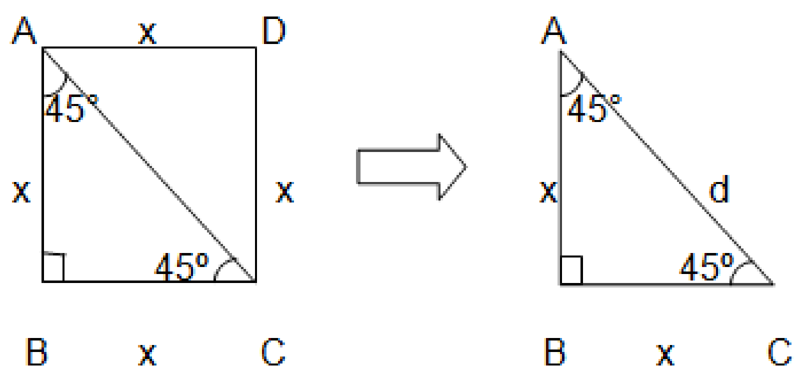
Utilizamos, inicialmente, o teorema de Pitágoras para determinar a medida da hipotenusa m: $m^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow m = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

Assim,

$$\cos\alpha = \frac{9}{3\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},\ sen\alpha = \frac{6}{3\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},\ tg\alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

6.6. Medida de Ângulos Notáveis

1. O Ângulo de 45°: Vamos calcular $sen45°, cos45°$ e $tg45°$. Para isso, basta tomar um triângulo retângulo que apresente um ângulo de 45°. Tal triângulo pode ser obtido, traçando uma diagonal em um quadrado ABCD.



Se o quadrado tem lado *x*, sua diagonal *d* pode ser calculada aplicando-se o teorema de Pitágoras.

$$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = x\sqrt{2}$$

Do triângulo retângulo ABC, conclui-se que:

$$sen45° = \frac{x}{d} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

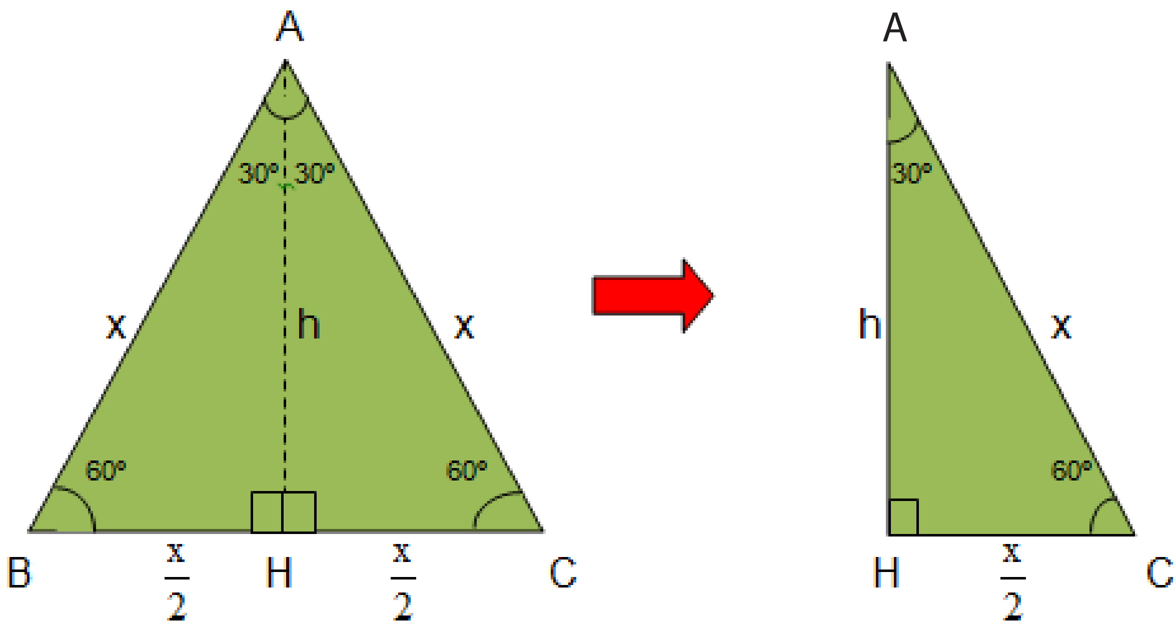
$$cos45° = \frac{x}{d} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg45° = \frac{x}{x} = 1$$

Ou seja,

$$sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ tg45° = 1$$

2. Os Ângulos de 30° e 60°: Calculemos agora o seno, cosseno e a tangente de 30° e 60°. Um triângulo retângulo com ângulos de 30° e 60° pode ser obtido traçando uma altura em um triângulo equilátero ABC. A altura CH pode ser a bissetriz (divide C em duas partes de 30° cada uma) e mediana (divide AB em duas partes iguais).



Se o triângulo ABC tem lado *x*, sua altura *h* pode ser determinada pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo retângulo HAC, obtêm-se para o ângulo A = 30°:

$$sen30° = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{h}{x} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^\circ = \frac{x/2}{h} = \frac{x/2}{x\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ou seja, $sen30^\circ = \frac{1}{2}$; $cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

E para o ângulo C = 60°:

$$sen60^\circ = \frac{h}{x} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60^\circ = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^\circ = \frac{h}{x/2} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x/2} = \sqrt{3}$$

ou seja, $sen60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos60^\circ = \frac{1}{2}$; $tg60^\circ = \sqrt{3}$.

Vamos resumir em uma tabela os resultados obtidos:

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

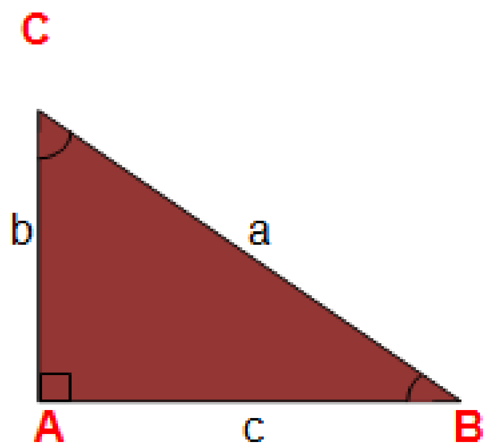
A principal aplicação das razões trigonométricas está na resolução de problemas (situações práticas) que recaem em triângulos retângulos dos quais são conhecidos os ângulos e um dos lados. Pela aplicação do seno, cosseno ou tangente de um dos ângulos, podemos determinar os demais lados do triângulo.

6.7. Ângulos Complementares

Dois ângulos são chamados complementares quando somam 90°. Assim, sendo B e C as medidas de dois ângulos complementares temos:

$$B + C = 90^\circ \quad B = 90^\circ - C \quad C = 90^\circ - B$$

Dizemos que B é o complemento de C (e que C é o complemento de B). Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. Note a figura:



Observamos que:

$$\text{senB} = \frac{b}{a} \text{ e cosC} = \frac{b}{a}\text{, logo senB = cosC}$$

$$\text{cosB} = \frac{c}{a} \text{ e senC} = \frac{c}{a}\text{, logo cosB = senC}$$

Podemos, então, enunciar a propriedade seguinte: o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complemento. O cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento. Uma vez que o complemento de B é 90° - C, temos que:

$$\text{senB} = \cos\left(90° - C\right) \text{ e cosC} = \text{sen}\left(90° - B\right)$$

6.8. Ângulos Suplementares

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares coincidem, isto é, sen (180º - x) = sen x, sendo x a medida de um ângulo qualquer.

Exemplo: Sendo x = 60º, temos:

$$\text{sen x} = \text{sen } 60º = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e sen } (180 - x) = \text{sen } 120º = \text{sen } 60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, ou seja, cos (180 – x) = - cos x.

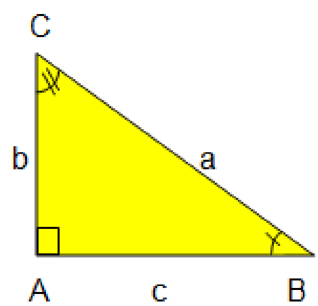
Exemplo: Sendo x = 45º, temos:

$$\cos x = \cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos (180º - x) = \cos 135º = -\cos 45º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observação: Para o caso particular de x = 90º, temos: sen 90º= 1 e cos 90º= 0.

6.9. Relação Fundamental

Seja o triângulo ABC abaixo. Sabe-se, pelo Teorema de Pitágoras, que $b^2 + c^2 = a^2$.



Dividindo, membro a membro, por a^2, obtemos:

$$\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\hat{B}+\cos^2\ \ =1 \text{ ou } \operatorname{sen}^2\hat{C}+\cos^2\hat{C}=1$$

De maneira geral, podemos escrever, para um ângulo x qualquer:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

que é chamada Relação Fundamental.

Convém notar que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 \neq \operatorname{sen} x^2$.

Exemplo: Seja o ângulo agudo x tal que cos x = 7/25. Determine sen x.

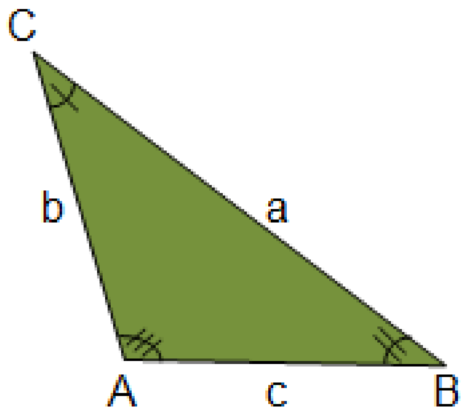
Resolução: Pela Relação Fundamental $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, tiramos que:

$$\operatorname{sen}^2 x+\left(\frac{7}{25}\right)^2=1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625} \Rightarrow \operatorname{sen} x=\pm\frac{24}{25}$$

Portanto, existem dois valores para sen x: $\frac{24}{25}$ ou $-\frac{24}{25}$.

6.10. Propriedades Trigonométricas num Triângulo Qualquer

P1) Lei dos Senos: Considere o triângulo ABC de lados a, b, c:

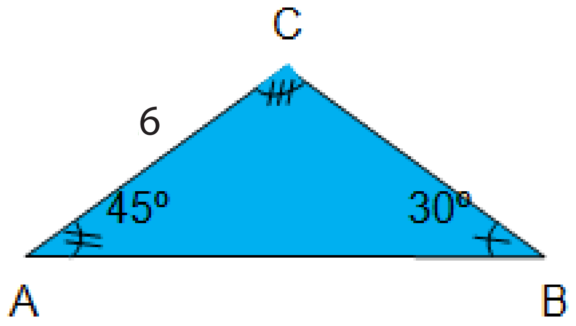


Para esse triângulo podemos escrever:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

que é conhecida como **lei dos senos**. Essa lei determina que a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante em um mesmo triângulo.

Exemplo 1: Vamos calcular os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ no triângulo ABC da figura abaixo:

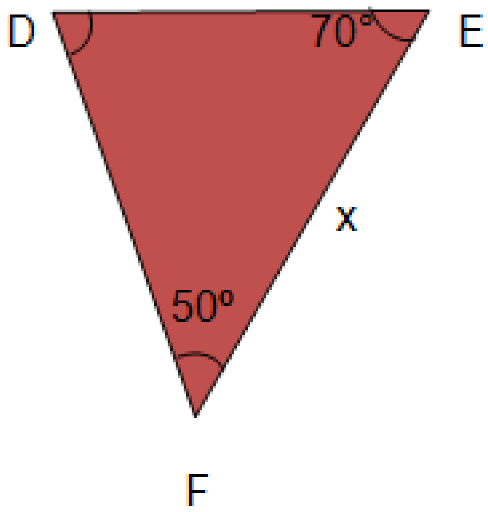


Resolução: Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, concluímos que o ângulo é 105º. Escrevemos:

$$\frac{6}{sen30^o} = \frac{\overline{BC}}{sen45^o} = \frac{\overline{AB}}{sen105^o} \Rightarrow \frac{6}{0,5} = \frac{\overline{BC}}{0,7071} = \frac{\overline{AB}}{0,9659}$$

Daí, tiramos que $\overline{BC} = 8,4852$ e $\overline{AB} = 11,5908$.

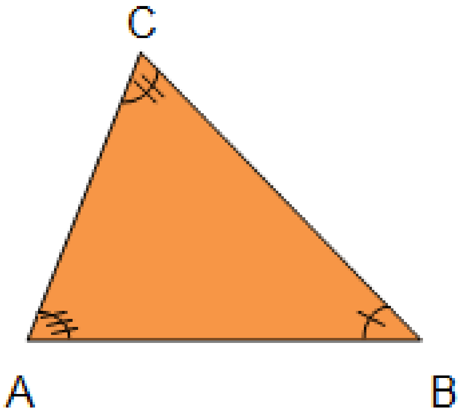
Exemplo 2: Na figura abaixo, sendo x a medida do lado $\overline{EF}$ do triângulo, determinar os outros dois lados em função de x.



Resolução: Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, segue que $\hat{D}=60°$. Agora basta utilizar a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen60^o} = \frac{\overline{DE}}{sen50^o} = \frac{\overline{DF}}{sen70^o} \Rightarrow \overline{DE} = x.\frac{sen50^o}{sen60^o} \text{ e } \overline{DF} = x.\frac{sen70^o}{sen60^o}$$

P2) **Lei dos Cossenos:** Considere um triângulo ABC qualquer de lados a, b e c:

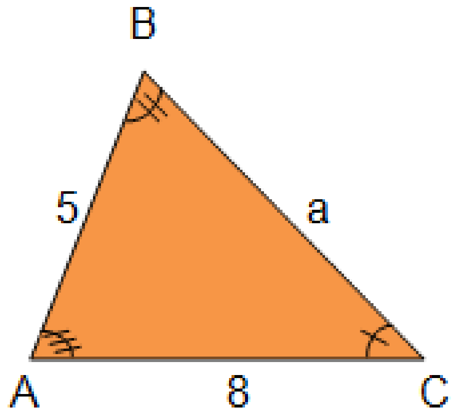


Para esses triângulos, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

A fórmula acima é **conhecida lei dos cossenos**, que determina que em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

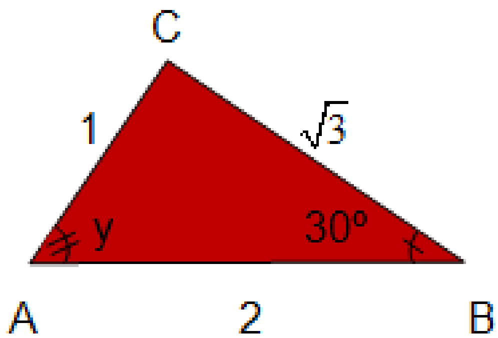
Exemplo 1: Determine o valor de a no triângulo abaixo:



Resolução: Em relação ao triângulo ABC acima, podemos aplicar a lei dos cossenos para encontrar o valor de a:

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 60^{\circ} \Rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80.\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

Exemplo 2: Encontre o valor de y da figura abaixo:



Resolução: Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

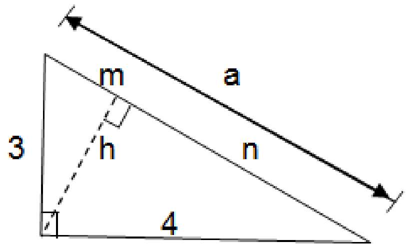
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos y \Rightarrow 3 = 5 - 4\cos y \Rightarrow$$

$$4\cos y = 2 \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 60^{\circ}$$

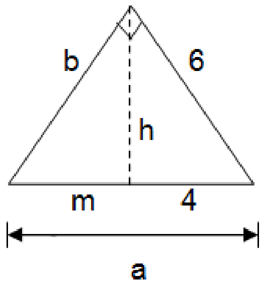
Teste seu conhecimento

1. Comprove a Relação Fundamental para x = 30º.

2. Calcular os elementos indicados na figura abaixo.



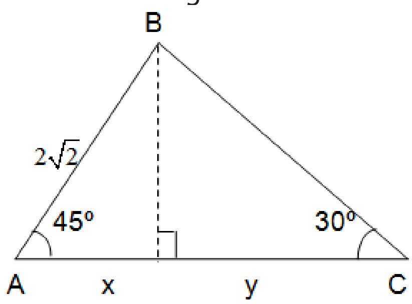
3. Determine *a,b,m* e *h*.



4. Em um triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 8 cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.

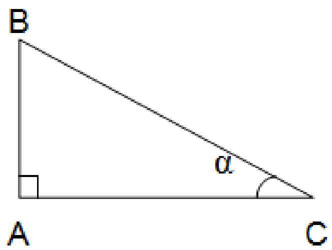
5. Calcule a área de um triângulo retângulo em que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem, respectivamente, 4 e 9.

6. Qual é a área do triângulo ABC abaixo?



7. As medidas dos catetos de um triângulo são (x+5)cm e (x+1)cm e a hipotenusa (x + 9)cm. Determine o perímetro e a altura desse triângulo.

8. Calcule o perímetro do triângulo retângulo ABC da figura, sabendo que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e o segmento BC é igual a 10 m.

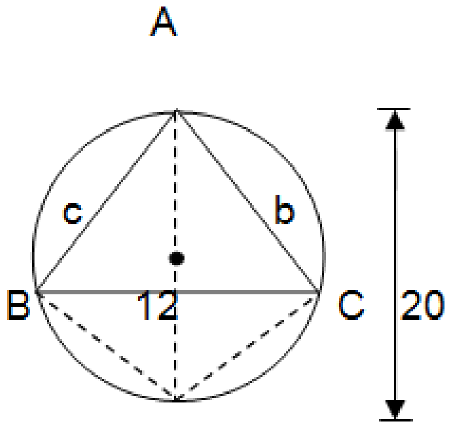


9. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo de perímetro 56 e altura $\frac{168}{5}$.

10. As raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ expressam, em cm, as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Nessas condições, determine a medida

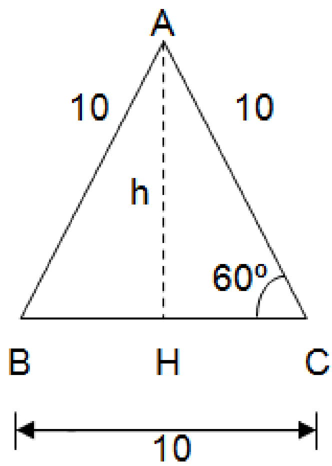
da hipotenusa.

11. Um triângulo isósceles tem base a=12 e está inscrito numa circunferência de diâmetro 2r=20. Calcule as medidas dos lados *b* e *c* do triângulo.



12. Calcule a altura de um triângulo isósceles, conhecendo o raio r = 5 da circunferência circunscrita e a base a=8.

13. Calcule a altura do triângulo equilátero (lados iguais) dado abaixo:



14. Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30°. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

a) 2 km b) 3 km c) 4 km d) 5 km

15. Os lados de um triângulo retângulo em A, medem BC = x+4, AC = x-4 e AB = x-5. Calcule x e determine a tangente de B.

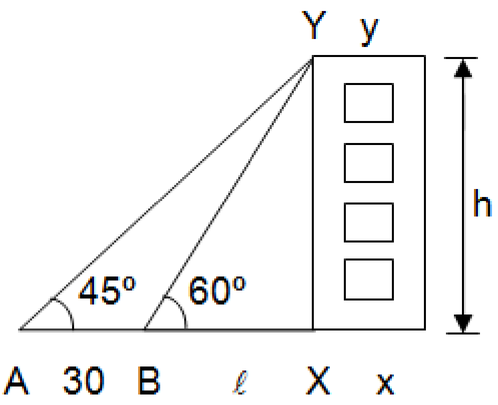
16. Calcule o perímetro de um triângulo isósceles, cuja base mede 616 mm e forma ângulos de 28° com os lados congruentes. Dados sen28° = 0,47; cos28° = 0,88 e tg28°=0,53.

17. Do alto de um farol, cuja altura é de 20m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 30°. A que distância, aproximadamente, o navio se acha do farol? (Use $\sqrt{3}=1,73$).

18. Uma escada faz um ângulo de 30° com a parede vertical de um prédio, ao tocar o topo distante 6m do solo. Determine o comprimento da escada.

19. Calcule os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60º.

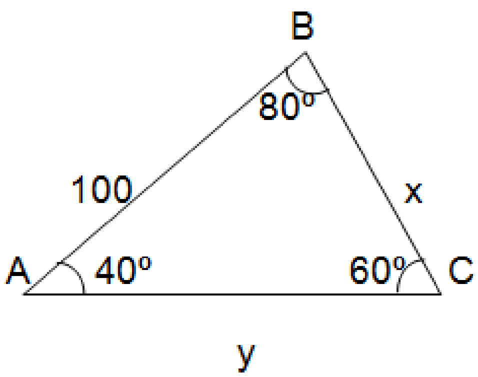
20. Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30m, passa a ver o edifício sob ângulo de 45°. Qual é altura do prédio?



21. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

a) $11/24$ b) $-11/24$ c) $3/8$ d) $-3/8$ e) $-3/10$

22. No triângulo a seguir determine os valores de x e y.



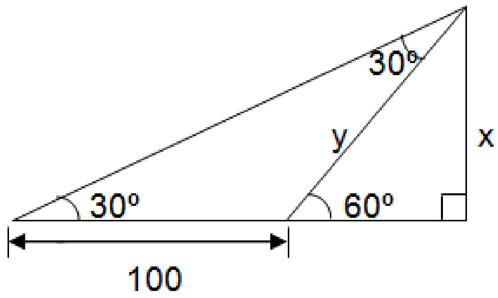
23. Em um triângulo, os lados de medidas $6\sqrt{3}$ cm e 8cm formam um ângulo de 30°. Determine a medida do terceiro lado.

24. Calcule os lados *b* e *c* de um triângulo ABC no qual a = 10, $\hat{B} = 30°$ e $\hat{C}$ =45 .

25. Quais são os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC para o qual $\hat{A}$ = 15°, $\text{sen}\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

26. Calcule os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo em que a=1, $b = \sqrt{3} + 1$ e $\hat{A}$ = 15°.

27. Calcule x indicado na figura:



28. As raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ expressam, em centímetros, as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa, o perímetro desse triângulo e o seno do maior ângulo agudo.

29. Converta em radianos:

a) 45º b) 36º c) 240º d) 600º

30. Converta em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$rad b) $\frac{2\pi}{3}$rad c) $\frac{5\pi}{4}$rad d) 3π rad

31. Determine, em radianos, a medida do arco $\hat{A}B$, de comprimento 10 cm, contido na circunferência de raio 5 cm.

32. Determine, em radianos, a medida de um arco de circunferência, cujo comprimento mede 30 cm, e o diâmetro dessa circunferência, 20 m.

Gabarito

2. $a = 5$; $h = \frac{12}{5}$; $m = \frac{9}{5}$ e $n = \frac{16}{5}$
3. $a = 9$; $b = 3\sqrt{5}$; $m = 5$; $h = 2\sqrt{5}$
4. Altura $= 4\sqrt{3}$
5. $A = 39cm^2$
6. $A = 6$.u.a
7. Perímetro = 48cm e Altura = 9,6cm
8. Perímetro = 24m
9. Hipotenusa = 25
10. Hipotenusa = 10cm
11. $b = c = 6\sqrt{10}$
12. $h = 8$ ou $h = 2$
13. $h = 5\sqrt{3}$
14. $h = 4km$
15. $x = 25$ e $h = \frac{21}{20}$
16. p = 1316 mm aproximadamente
17. Distância de 11,53m
18. Comprimento de $4\sqrt{3}$ m
19. Catetos iguais a 3 e $3\sqrt{3}$
20. $h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ m
21. Letra b
22. $x = 73{,}56$ e $y = 112{,}64$
23. $x = 2\sqrt{7}$ cm
24. $b = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ e $c = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$
25. $\hat{B} = 120°$ e $\hat{C} = 45°$
26. $\hat{B} = 45°$ e $\hat{C} = 120°$ ou $\hat{B} = 135°$ e $\hat{C} = 30°$; $h = 4{,}8cm$; $sen\alpha = 0{,}8$; Perímetro = 24 cm;
27. $x = 50\sqrt{3}$
28. $h = 4{,}8cm$; Perímetro = 24cm; $sen\alpha = 0{,}8$.

29.a) $\frac{\pi}{4}$rad b) $\frac{\pi}{5}$rad c) $\frac{4\pi}{3}$rad d) $\frac{10\pi}{3}$rad

30.a)30° b)120° c)225° d)540°

31. $y = 2$ rad
32. 3 rad

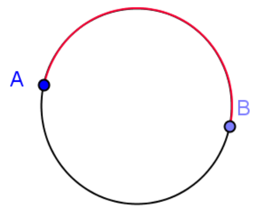
Trigonometria no Círculo

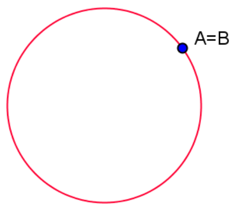
7.1. Introdução

Utilizando os conhecimentos de senx, cosx e tgx, extraídos do triângulo retângulo, vamos ampliar nosso estudo aplicando esses conceitos em arcos.

Arco de uma circunferência é um segmento qualquer da circunferência, limitado por dois de seus pontos distintos.

Exemplos:

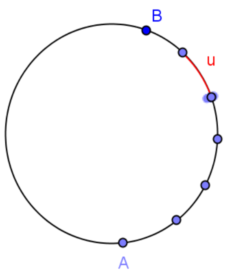




Se quisermos comparar os "tamanhos" de dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, somos naturalmente levados a estabelecer um método que permita saber qual deles é o maior ou se são iguais. Este problema é resolvido estabelecendo-se um método para medir arcos.

Consideremos um arco $\overset{\frown}{AB}$ e um arco unitário *u* (não-nulo e de mesmo raio). Ao compararmos o arco $\overset{\frown}{AB}$ com o arco *u* (ao determinarmos quantas vezes o arco *u* cabe no arco $\overset{\frown}{AB}$), estamos medindo o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ na unidade de *u*. Na figura abaixo, *u* cabe seis vezes em $\overset{\frown}{AB}$. Então:

$$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = 6u$$



Lemos: a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a seis na unidade *u*.

Medidas de um arco $\overset{\frown}{AB}$ em relação a um arco unitário *u* (*u* não nulo e de mesmo raio que $\overset{\frown}{AB}$) é o número real que exprime quantas vezes o arco *u* "cabe" no arco $\overset{\frown}{AB}$. Assim, na figura ao lado, o arco *u* cabe 6 vezes no arco $\overset{\frown}{AB}$, então a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 6, isto é, $\overset{\frown}{AB}$= 6.arco *u*.

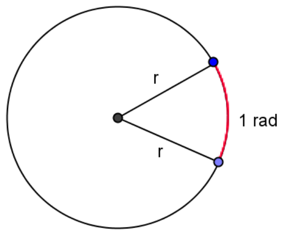
Para evitar as confusões que ocorreriam se cada um escolhesse uma unidade *u* para medir o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$, limitamos as unidades de arcos a apenas duas: o *grau* e o *radiano*.

1) **Grau (°)** : Dividimos a circunferência em 360 partes iguais e a cada arco unitário, que corresponde a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência, chamamos de grau. Então, a circunferência mede 360 graus, que indicamos por 360°. Os submúltiplos do grau são o minuto (′) e o segundo (″).

1 grau = 60 minutos **(1° = 60′)**

1 minuto = 60 segundos **(1′ = 60″)**

2) **Radiano (rad)**: Radiano é um arco unitário, cujo comprimento é igual ao comprimento do raio de circunferência no qual está contido.



Uma circunferência de raio r=1 possui como medida 2π radianos (2π rad). Considerando uma circunferência com centro O e raio medindo r, um ângulo central AOB de medida γ, em radianos, e o correspondente arco $\overset{\frown}{AB}$ contido nesse ângulo, podemos estabelecer a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ccc} r & \_\_\_\_\_ & 1 \\ med(\overset{\frown}{AB}) & \_\_\_\_\_ & \gamma \end{array} \Rightarrow \frac{r}{med(\overset{\frown}{AB})} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow r.\gamma = med(\overset{\frown}{AB}).1$$

Obtemos então:

$$\gamma = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{r} \text{ ou } med(\overset{\frown}{AB}) = \gamma.r$$

Exemplo: Determine em radianos a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento 20 cm contido numa circunferência de diâmetro 20 cm.

Resolução: O raio é dado por:

$$r = \frac{\text{diâmetro}}{2} = \frac{20\text{ cm}}{2} = 10\text{cm}$$

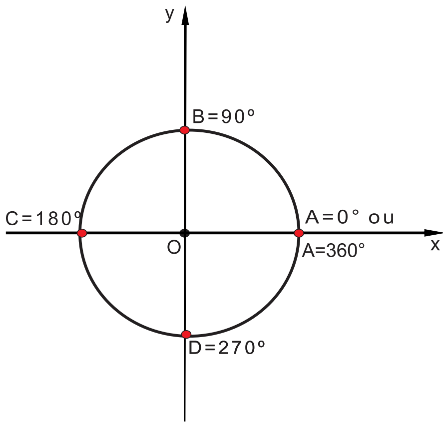
Logo, a medida de , em radianos, é obtida por:

$$\gamma = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{r} \Rightarrow \gamma = \frac{20\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Rightarrow \gamma = 2\text{ rad}$$

7.2. Ciclo Trigonométrico

Chamamos de ciclo trigonométrico toda circunferência orientada em que:

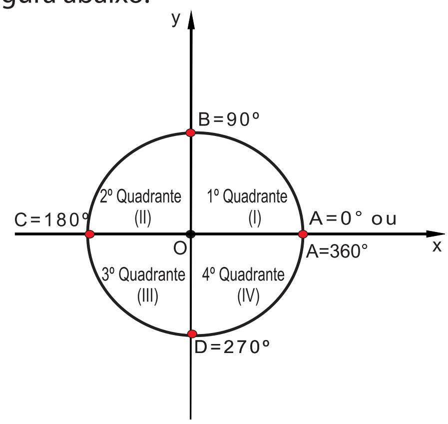
- O centro é a origem do plano cartesiano;
- O raio (r) é unitário (r = 1);
- O sentido positivo é o anti-horário;
- O sentido negativo é o horário;
- O ponto A é a origem do ciclo trigonométrico. A localização da extremidade de um arco varia conforme o comprimento desse arco.



Os eixos cartesianos dividem o ciclo trigonométrico em quatro arcos, cada qual contido em um *quadrante*. Um quadrante AP do ciclo trigonométrico, de medida x, com $0^o \leq x \leq 360°$ ou $0 \text{ rad} \leq x \leq 2\pi \text{ rad}$, tem a extremidade P pertencente a um dos quadrantes, conforme as desigualdades:

- x está no 1º quadrante se $0° < x < 90º$;
- x está no 2º quadrante se $90° < x < 180°$;
- x está no 3° quadrante se $180° < x < 270°$;
- x está no 4° quadrante se $270° < x < 360°$.

Veja a figura abaixo:



7.3. Arcos Côngruos

Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma extremidade. Trabalhamos sempre com arcos da 1ª volta do sentido positivo e, quando isso não ocorre, como com 480º, determinamos o seu côngruo da 1ª volta positiva. Uma forma mais simples de obtermos esse resultado é dividir 480º por 360º para extrair o número de voltas. O resto da divisão é a medida do arco de mesma extremidade.

Exemplo:

$$\begin{array}{l|l} 480^o & 360° \\ \cline{2-2} \underbrace{120°}_{\text{medida do arco de mesma extremidade}} & \underbrace{1}_{\text{nº de voltas no sentido positivo}} \end{array} \Rightarrow 480^o = 360^o.1 + 120^o$$

Para medidas negativas, esse procedimento nos leva ao arco côngruo da 1ª "volta negativa". Daí, basta somarmos 360º para chegarmos à 1ª "volta positiva".

Exemplo: O ângulo 157° está na 1ª volta negativa. Então:

$$-157° + 360 = 203°$$

O ângulo 203° é a medida do arco da 1ª volta com a mesma extremidade que -157°.

Portanto, considerando β a medida de um arco, a expressão geral das medidas dos arcos côngruos a ele é dada por:

$$\alpha + k.360° \text{ (em graus) ou } \alpha + k.2\pi \text{(em radianos)}$$

onde α é a medida do arco côngruo da 1ª volta positiva e $k \in \mathbb{Z}$. A medida α é chamada de 1ª determinação positiva.

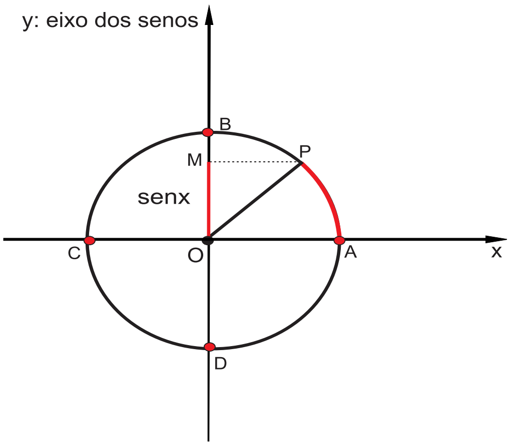
Exemplo: Determinar em qual quadrante situa-se as extremidades do arco 1280º.

$$\begin{array}{r|l} 1280° & 360° \\ \cline{2-2} 200° & 3 \end{array}$$

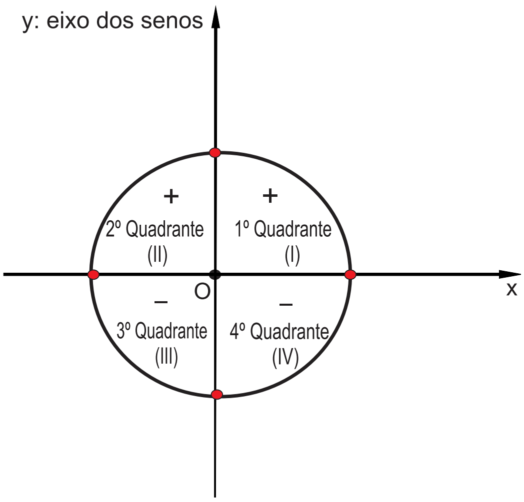
Situa-se no 3º quadrante, pois 180° < 200° < 270°.

7.4. Seno

Considere o arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida é o número real *x*, denominamos seno do arco $\overset{\frown}{AP}$ o valor da ordenada do ponto *P*.



Como os valores do seno são marcados no eixo das ordenadas Oy, então o seno será positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes.



Em resumo:

	Seno			
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinal	+	+	-	-
Variação	crescente	decrescente	decrescente	crescente

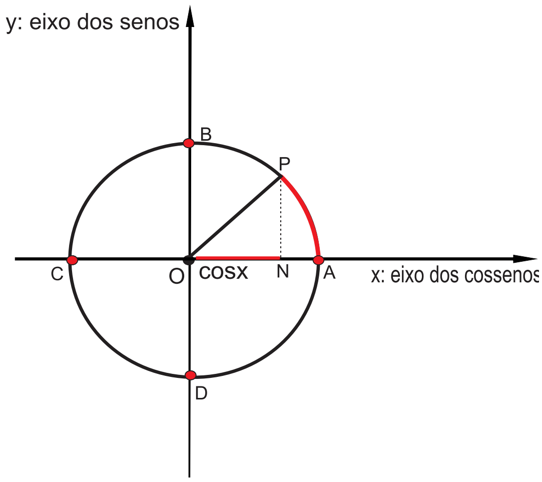
Abaixo apresentamos o valor do seno de alguns arcos notáveis:

x	0º/ 0 rad	90º / $\frac{\pi}{2}$ rad	180º / π rad	270º / $\frac{3\pi}{2}$ rad	360º / 2π rad
sen x	0	+ 1	0	- 1	0

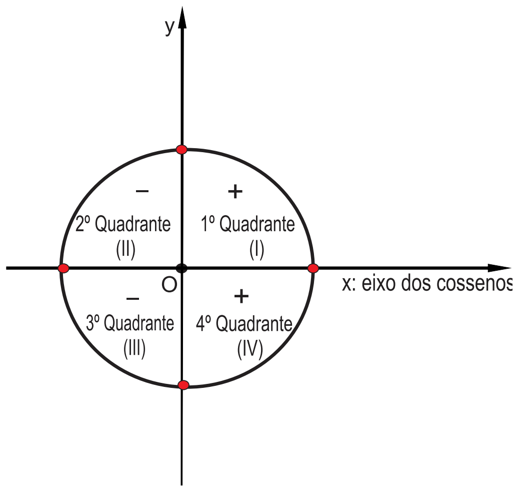
Propriedade: sen (-x) = - sen x

7.4. Cosseno

Considere o arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida é o número real *x*, denominamos cosseno do arco $\overset{\frown}{AP}$ o valor da abscissa do ponto *P*.



Como os valores do cosseno são marcados no eixo das abscissas Ox, então o cosseno será positivo no 1º e 4º quadrantes e negativo no 2º e 3º quadrantes.



Em resumo:

	Cosseno			
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinal	+	-	-	+
Variação	decrescente	decrescente	crescente	crescente

Abaixo apresentamos o valor do cosseno de alguns arcos notáveis:

x	0º/ 0 rad	90º / $\frac{\pi}{2}$ rad	180º / π rad	270º / $\frac{3\pi}{2}$ rad	360º / 2π rad
cos x	+1	0	-1	0	+1

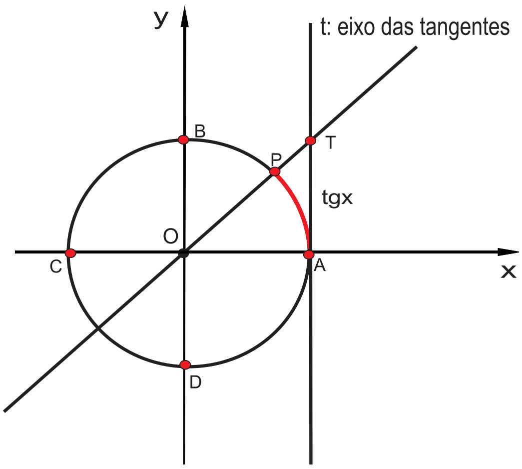
Propriedade: cos(-x) = cos x

7.5. Tangente

Considerando um arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida é o número real x, temos:

$$tgx = \frac{senx}{cosx}, \text{ sendo } cosx \neq 0$$

No ciclo trigonométrico, o eixo das tangentes (t) é orientado no mesmo sentido do eixo das ordenadas Oy, tendo como origem o ponto A.



A tangente de um arco $\overset{\frown}{AP}$ é determinada pela reta auxiliar (em preto), que passa pelo centro O e pela extremidade do arco (ponto P), marcando o ponto T, no eixo das tangentes (t). A tangente é dada pelo segmento $\overline{AT}$, ou seja, $tgx = \overline{AT}$.

Exemplo: Determinar $tg45º, tg30º$ e $tg180º$.

Resolução:

$$tg45º = \frac{sen45º}{cos45º} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1;$$

$$tg30º = \frac{sen30º}{cos30º} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$tg180º = \frac{sen180º}{cos180º} = \frac{0}{-1} = 0$$

7.6. Cotangente

Considerando um arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida é o número real x, podemos definir a cotangente:

$$\text{cotgx} = \frac{\text{cosx}}{\text{senx}}, \text{ sendo } \text{senx} \neq 0, \text{ isto é } x \neq k.\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Como $\text{cotgx} = \frac{\text{cosx}}{\text{senx}}$, temos $\text{cotgx} = \frac{1}{\text{tgx}}$, observadas as condições de existência.

Exemplo: Determinar $\text{cotg}180°$, $\text{cotg}90°$ e $\text{cotg}\frac{\pi}{4}$.

Resolução: $\text{cotg}180°$ não está definida, pois sen180º = 0.

$$\text{cotg}90° = \frac{\cos 90°}{\text{sen}90°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{cotg}\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\text{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

7.7. Secante

Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida é o número real x, a secante é o inverso do cosseno:

$$\text{secx} = \frac{1}{\text{cosx}}, \text{ sendo } \text{cosx} \neq 0, \text{ isto é: } x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como -1 ≤ cosx ≤ 1, podemos concluir que x ≥ 1ou sec x ≤ -1.

Exemplo: Determinar sec90° sec60°.

Resolução: A função não se define para x=90°, pois cos 90º = 0.

$$\text{sec}60° = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

7.8. Cossecante

Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida é o número real x, a cossecante é o inverso do seno:

$$\text{cossecx} = \frac{1}{\text{senx}}, \text{ sendo } \text{senx} \neq 0, \text{ isto é: } x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como -1 ≤ senx ≤ 1, podemos concluir que cossecx ≥ ou cossecx ≤ -1.

Exemplo: Determinar $\text{cossec}180°$ e $\text{cossec}\frac{3\pi}{2}$.

Resolução: cossec 180° não está definida para x=180°, pois sen180º = 0.

$$\text{cossec}\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\text{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

7.9. Fórmulas de Adição e Subtração

O objetivo desta seção é a apresentação de fórmulas que nos possibilitem encontrar valores do seno e cosseno da soma e subtração de dois arcos. Por exemplo, como são conhecidos os valores de sen45º, sen30°, cos30°, cos45°, etc., poderemos, em função deles, obter sen75° = sen (30° + 45°), cos15° = cos (45° - 30°), etc.

1) Cosseno da soma de dois arcos: O cosseno da soma de dois arcos, a e b, é dado por:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Exemplo: Para calcular cos75º podemos utilizar a fórmula acima, fazendo:

$$\cos 75^o = \cos(30° + 45^o) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 45^o$$

Substituindo pelos valores conhecidos, temos

$$\cos 75^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2) Cosseno da diferença de dois arcos: O cosseno da diferença de dois arcos, a e b, é dado por:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

3) Seno da soma de dois arcos: O seno da soma de dois arcos, a e b, é dado por:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

4) Seno da diferença de dois arcos: O seno da diferença de dois arcos, a e b, é dado por:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$

Exemplo: Para calcular sen15º podemos utilizar a fórmula acima, fazendo:

$$\text{sen } 15^o = \text{sen } (45^o - 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos 45^o$$

Substituindo pelos valores conhecidos, temos

$$\text{sen } 15^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

7.10. Fórmula de transformação em produto

Para a fatoração de certas expressões, a Trigonometria dispõe de algumas fórmulas próprias que, quando associadas aos recursos algébricos de que já dispomos, permitirão a fatoração de expressões como senx + cosx, cosx – cosy, senx + seny e outras.

1) Transformação de somas e diferenças de senos: Tomemos as expressões do seno da soma e do seno da diferença de dois arcos.

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$
$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$$

Somando-as e subtraindo a 2ª da 1ª, membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} a \cos b \\ \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} b \cos a \end{aligned}$$

Façamos $a + b = p$ e $a - b = q$. Assim:

$$a = \frac{p+q}{2} \text{ e } b = \frac{p-q}{2}$$

Daí:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Exemplo: Para fatorar $y = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$, fazemos:

$$a = \frac{3x+x}{2} = 2x \text{ e } b = \frac{3x-x}{2} = x$$

Daí:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} 2x \cos x = \\ &= 2.2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x = 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x \end{aligned}$$

2) Transformação de somas e diferenças de cossenos: Tomemos as expressões do cosseno da soma e do cosseno da diferença de dois arcos:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

Somando-as e subtraindo a 2ª da 1ª, membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

Façamos $a + b = p$ e $a - b = q$. Assim:

$$a = \frac{p+q}{2} \text{ e } b = \frac{p-q}{2}$$

Daí:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exemplo 1: Para transformar em produto a expressão $y = \cos x + \cos 3x$, fazemos

$$a = \frac{3x+x}{2} = 2x \text{ e } b = \frac{x-3x}{2} = -x$$

Daí:

$$y = \cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos(-x) = 2\cos 2x \cos x$$

Exemplo 2: Fatorando t = cos 50° - cos 40°, temos:

$$t = \cos 50^\circ - \cos 40^\circ = -2\,\text{sen}\left(\frac{50^\circ + 40^\circ}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{50^\circ - 40^\circ}{2}\right) =$$

$$= -2\,\text{sen}\,45^\circ\,\text{sen}\,5^\circ = -2\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\,5^\circ = -\sqrt{2}\,\text{sen}\,5^\circ$$

Observação: Em todas as fatorações apresentadas, ocorre repetição da função (seno ou cosseno); se eventualmente aparecer, por exemplo, uma expressão do tipo y = cos 20º + sen 50º, poderemos escrever, lembrando que sen x = cos (90º - x):

$$y = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \text{ ou } y = \text{sen}\,70^\circ + \text{sen}\,50^\circ$$

e fatorar normalmente, como nos exemplos apresentados.

Teste seu Conhecimento

1. Exprima em radianos

a) 60º b) 15º c) 75º d) 225º e) 240º

2. Exprima em graus:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{2\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{6}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) $\frac{5\pi}{3}$ rad

3. Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ e 2π.

4. Determine os quadrantes a que pertencem as extremidades dos seguintes arcos:

a)141° b)-100° c)1998° d) $\frac{5\pi}{4}$

5. Identifique se $\frac{\pi}{6}$ rad e $\frac{25\pi}{6}$ rad são côngruos.

6. Indique o valor de:

a) $\text{sen}\pi$ b) $\text{sen}\frac{11\pi}{2}$ c) $\text{sen}0^\circ$ d) $\text{sen}(-90^\circ)$

7. Quais valores que k pode assumir para tornar possível a igualdade $\text{sen}x = k + 3$?

8. Indique o valor de:

a) $\cos 2\pi$ b) $\cos\frac{7\pi}{2}$ c) $\cos 1080^\circ$ d) $\cos(-180^\circ)$

9. Qual valor k pode assumir para tornar possível a igualdade $\cos x = 2k + 7$.

10. Simplifique a expressão $y = \cos(-90^\circ) + \text{sen}450^\circ$.

11. Dê o valor de:

a) $tg\ 0°$ b) $tg\dfrac{3\pi}{4}$

12. Verifique se são verdadeiras ou falsas as igualdades:

a) $tg60° = tg210°$

b) $tg45° = tg270°$

c) $tg\dfrac{\pi}{3} = tg\dfrac{7\pi}{3}$

d) $tg\dfrac{3\pi}{4} = tg\dfrac{5\pi}{4}$

13. Determine:

a) $cotg30°$ b) $cotg60°$ c) $cotg\ \dfrac{3\pi}{2}$ d) $cotg\dfrac{5\pi}{4}$

14. Determine a secante em cada caso:

a) $sec0°$ b) $sec120°$ c) $sec\pi$ d) $sec2\pi$ e) $sec\dfrac{13\pi}{6}$

15. Obtenha o valor de $3sec30° - \sqrt{2}.sec45°$.

16. Determine:

a) $cossec0°$ b) $cossec60°$

c) $3.cossec60° - \dfrac{\sqrt{3}.cossec30°}{2}$ d) $cossec\dfrac{\pi}{2}$

17. Simplifique a expressão $\dfrac{-2cossec\dfrac{5\pi}{2} - cossec\dfrac{7\pi}{4}}{cossec\dfrac{25\pi}{6}}$.

18. Mostre que cos(2a) = cos(a+a):

a) cos(2a) = cos(a+a)

Dica: use cos(2a) = cos(a+a)

b) sen(2a) = 2sen a.cos a

Dica: use sen(2a) = sen (a+a)

19. Encontre o seno, a secante e a cotangente do arco x do 2º quadrante cujo cosseno vale -0,6.

20. Simplifique a expressão $\dfrac{3cossec\ x - sec\ x}{tg\ x + 3cotg\ x}$.

21. Simplifique a expressão $\dfrac{sec\ x + sen\ x}{cossec\ x + cos\ x}$.

22. Sabendo que cos a = 2 sen a, calcule tg a e sen a.

23. Verifique a identidade trigonométrica $1 + tg^2x = sec^2x$.

Dica: $sen^2x + cos^2x = 1$.

24. Determine sen 75º, cos 105º e sec 105º.

25. Determine o produto sec 75º. cossec 75º.

26. Marque verdadeiro (V) ou falso (F):

a) sen(a + b) – sen(a – b) = 2 sen a cos b.

b) cos 15º - cos 75º = cos 45º.

c) $\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{4}$.

27. Qual é o valor de sen63° cos18° - sen18° cos63° ?

28. Qual é o valor de cos25°cos55° + cos 25° sen55° ?

29. Simplifique a expressão $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

30. Dados $\operatorname{sen} a = \frac{4}{5}$ e $\cos b = \frac{2}{3}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \frac{\pi}{2}$, determine:

a) sen(a + b) b) cos(a – b) c) tg(a + b)

Gabarito

1. a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{12}$ rad c) $\frac{5\pi}{12}$ rad d) $\frac{5\pi}{4}$ rad e) $\frac{4\pi}{3}$ rad

2. a)45º b)120º c)30º d)150º e)300º

3.

4. a)2° b)3° c)3° d)3°

5. São côngruos

6. a)0 b)-1 c)0 d)-1

7. $-4 \leq k \leq -2$

8. a)1 b)0 c)1 d)-1

9. $-4 \leq k \leq -3$

10. 1

11. a)0 b)-1

12. a) falsa b) falsa c) verdadeira d) falsa

13. a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c)0 d)1

14. a)1 b)-2 c)-1 d)1 e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

15. $2\left(\sqrt{3} - 1\right)$

16. a) não é definida b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d)1

17. $\frac{-2 + \sqrt{2}}{2}$

18.

19. sen x = 0,8; sec x = -1,66666...; cotg x = -0,75.

20. sec x

21. tg x

22. tg a = $\frac{1}{2}$; sen a = $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

23.

24.

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};\ \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};\ \sec 105^\circ = \frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

25. 4

26. a) Falso b) Verdadeiro c) Falso

27. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

29. sen x.

30. a) $\dfrac{8 + 3\sqrt{5}}{15}$ b) $\dfrac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$ c) $\dfrac{-25\sqrt{5} - 54}{22}$

Equações e funções trigonométricas

8.1. Equações Trigonométricas

Para que tenhamos uma equação trigonométrica, basta que apareça uma igualdade contendo uma incógnita (ou mais de uma) submetida a alguma função trigonométrica. Vejamos:

$$\text{sen}^3 x - \text{sen}\, x = 0;$$
$$\text{sen}x + \cos y = 1;$$
$$\cos 2x - \text{sen}\, 2x = -1/2$$

São equações trigonométricas. Já a igualdade $x \cos \pi + x^2 \text{tg}(\pi/4) = 0$, por exemplo, não é equação trigonométrica, mas simplesmente uma equação do 2º grau.

De modo geral, por mais complicada que possa parecer uma equação, é possível reduzi-la a uma equação dos seguintes tipos:

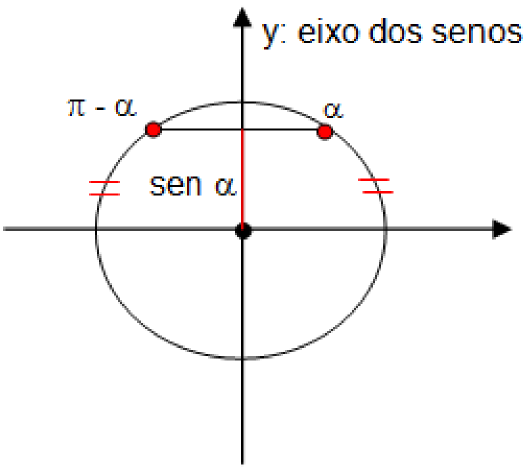
$$\text{sen}\, x = \text{sen}\, \alpha;$$
$$\cos x = \cos \alpha;$$
$$\text{tg}\, x = \text{tg}\, \alpha,$$

Sendo x a incógnita e α um arco de medida conhecida. Por esse motivo, essas três equações serão chamadas *equações fundamentais*. Trataremos, a seguir, de cada uma delas.

8.2. Resolução da Equação Fundamental senx = senα

Para que x e α tenham o mesmo seno, basta que suas extremidades estejam sobre uma mesma horizontal; podemos dizer também que basta as suas extremidades coincidirem ou serem simétricas em relação ao eixo dos senos. Nessas condições, sendo $k \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que $\alpha + 2k\pi$ e $(\pi - \alpha) + 2k\pi$ possuem o mesmo seno. Assim, o conjunto solução é dado por:

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = (\pi - \alpha) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

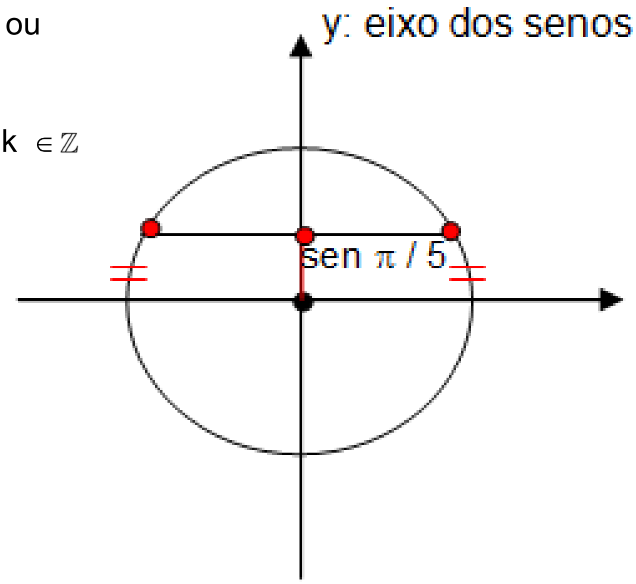


Exemplo 1: Resolva a equação $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \dfrac{\pi}{5}$, sendo o conjunto universo o conjunto dos números reais, isto é, $U = \mathbb{R}$.

Resolução: Temos

$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou}$$

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



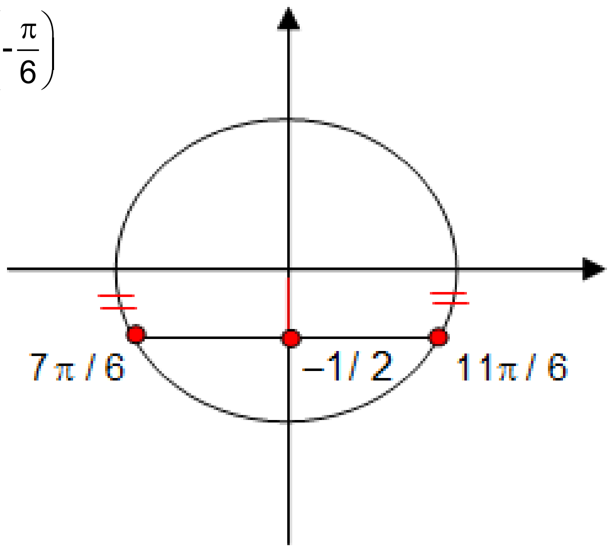
Podemos escrever:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 2: Resolva a equação $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$, com $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução: Dado que $\frac{1}{2} = \text{sen } \frac{\pi}{6}$, temos:

$$-\frac{1}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sen}(-x) = -\text{sen}x}}{-\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$



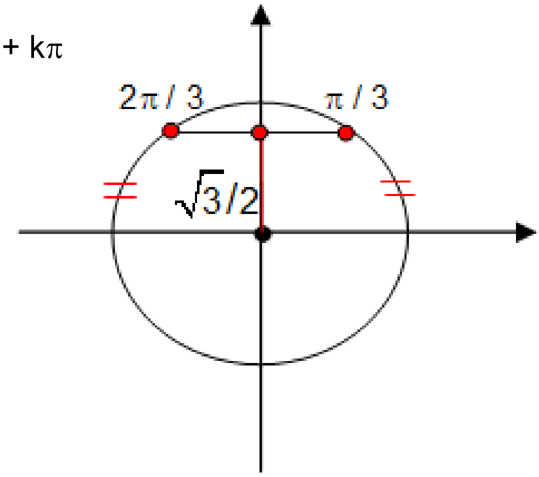
A primeira determinação positiva do arco $-\frac{\pi}{6}$ é o arco $\frac{11\pi}{6}$, que satisfaz a equação, juntamente com o seu simétrico em relação ao eixo dos senos, o arco $\frac{7\pi}{6}$. Assim, o conjunto solução da equação acima é dado por:

$$S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Exemplo 3: Resolva a equação $\text{sen } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $U = \mathbb{R}$.
Resolução:

Como $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$



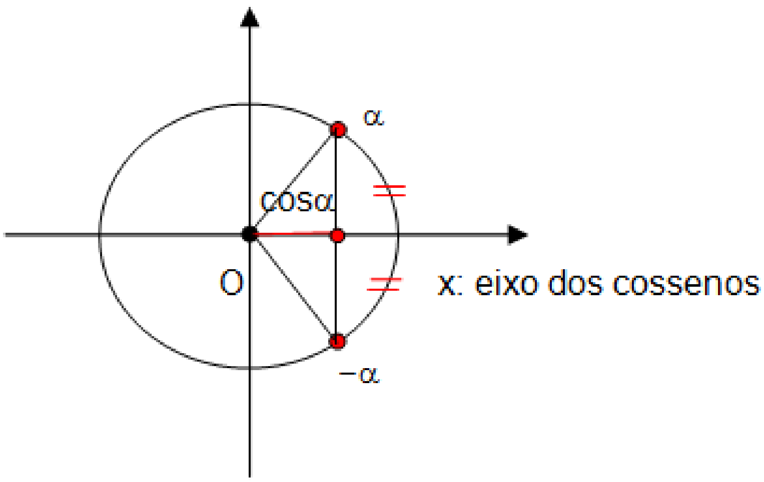
Portanto,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

8.3. Resolução da Equação Fundamental cosx = cosα

Para que x e α tenham o mesmo cosseno, é necessário e suficiente que suas extremidades coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo dos cossenos, ou, em outras palavras, que ocupem no ciclo a mesma vertical. Nessas condições, sendo $k \in \mathbb{Z}$, podemos dizer que $\alpha + 2k\pi$ e $-\alpha + 2k\pi$ possuem o mesmo cosseno. Assim, escrevemos seu conjunto solução como:

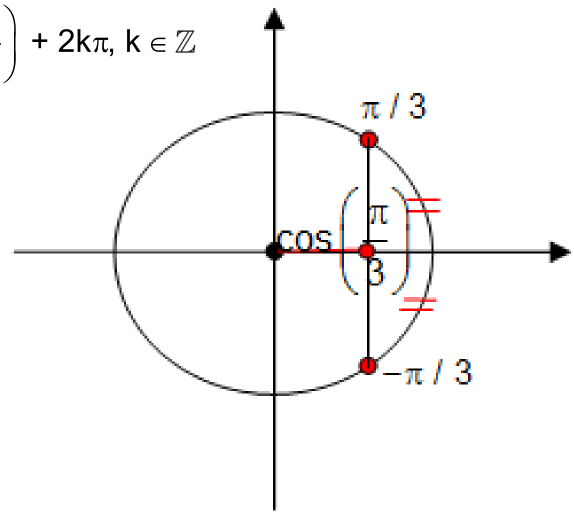
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$



Exemplo 1: Resolva a equação $\cos\ x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Resolução: Temos:

$$x = \pm\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



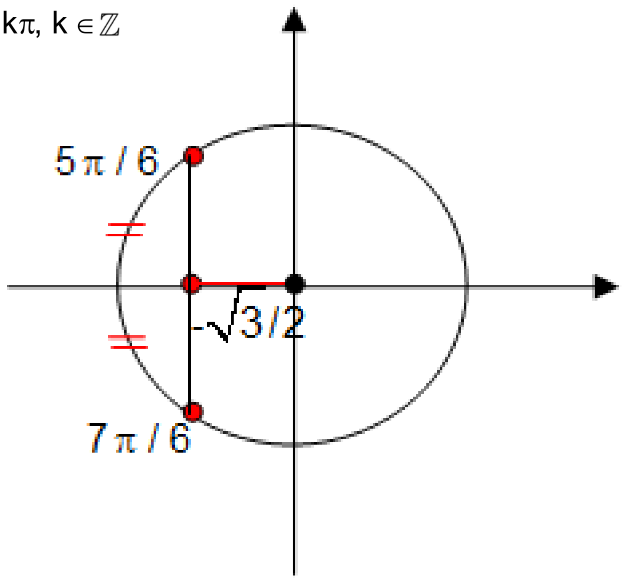
Daí, seu conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 2: Resolva a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo $U = [0, 2\pi]$.

Resolução: Como $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$, teríamos:

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



Mas, como x faz parte apenas da primeira volta ($U = [0, 2\pi]$), x pode assumir apenas dois valores, que são $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$. Portanto, seu conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$$

Exemplo 3: Resolva a equação $\cos 3x = 1$, sendo $U = [0, 2\pi[$.

Resolução: Como $1 = \cos 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, podemos escrever:

$$3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

Atribuindo valores para k, encontramos a solução em $[0, 2\pi[$:

$$k = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$
$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$
$$k = 3 \Rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)}$$

Portanto, seu conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

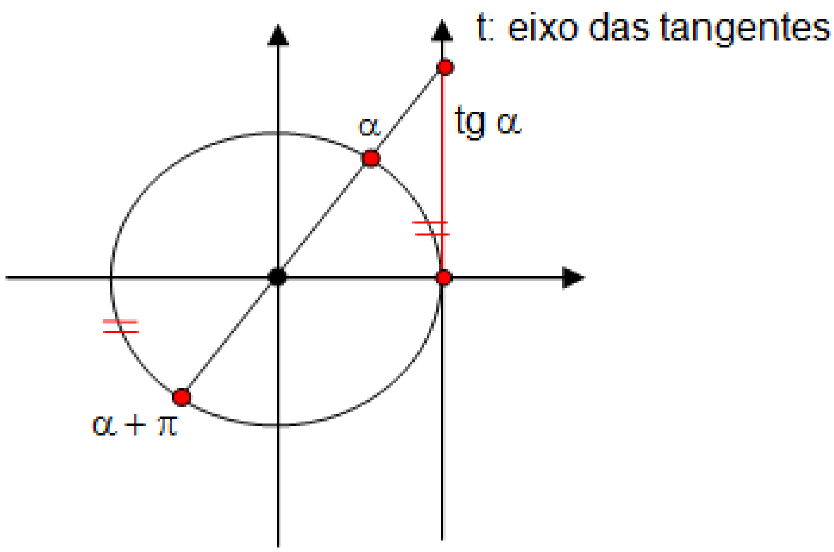
8.4. Resolução da Equação Fundamental tgx = tgα

Temos, aqui, também duas possibilidades: ou as extremidades de x e α coincidem, ou elas são simétricas em relação ao centro do ciclo. Assim, temos:

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = (\alpha + \pi) + 2k\pi$$

O que equivale a dizer que $x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. O conjunto solução se escreve:

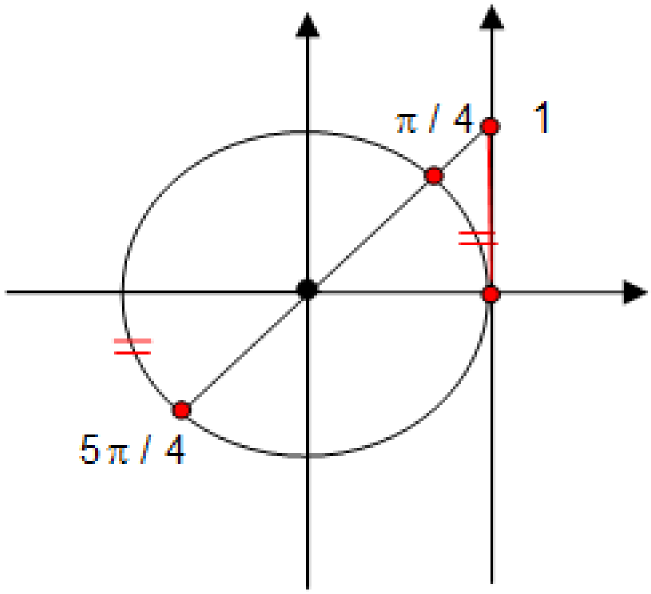
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$



Exemplo 1: Resolva a equação tgx = 1, U=$\mathbb{R}$.

Resolução: Sabemos que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ e, portanto, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Temos

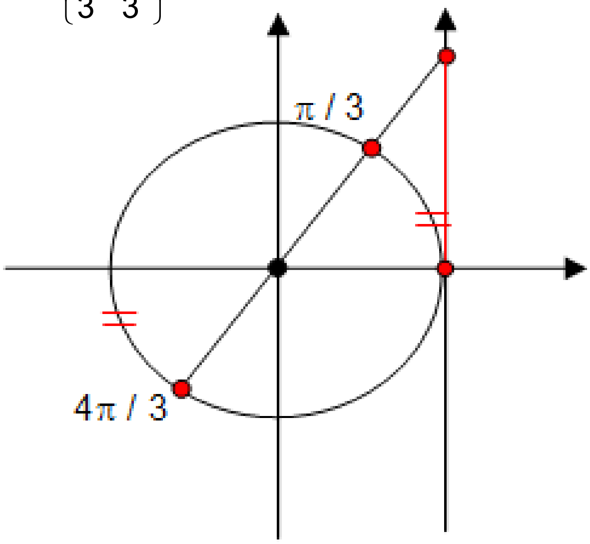
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$



Exemplo 2: Resolva a equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $U =]0, 2\pi[- \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Resolução: Temos $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$, logo:

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$



Exemplo 3: Resolva a equação $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$, com $U = [0, \pi]$.

Resolução: Temos $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$. Daí:

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo k = 0, obtemos $x = \frac{7\pi}{12}$. Para k = 1, temos $x = \frac{19\pi}{12} > \pi$ (não convém). Portanto, o conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{\frac{7\pi}{12}\right\}$$

8.5. Outras Equações

Apresentaremos agora alguns exemplos em que não temos as equações fundamentais:

Exemplo 1: (Mudança de Variável)

a) Resolva a equação $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.
Resolução: Para facilitar a resolução, podemos fazer cos x = t, obtendo:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em t, temos:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.1}}{2.2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalmente,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Resolva, agora, a equação $\text{sen}^2 x - 4\ \text{sen}\ x + 3 = 0$, com $x \in\ ]0, 4\pi[$.
Resolução: Fazendo sen x = t, temos:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow t = 3 \text{ ou } t = 1$$

Portanto,

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \text{sen}\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{2} \\ t = 3 \Rightarrow \text{sen}\ x = 3, \text{ o que é impossível } (-1 \leq \text{sen}\ x \leq 1) \end{cases}$$

Assim,

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\}$$

Exemplo 2: (Utilização das Relações Trigonométricas)

a) Resolva a equação $2\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{7}{4}$.

Resolução: Para resolver a equação acima, podemos utilizar a relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, que nos fornece $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$. Substituindo na equação original, temos:

$$2\ \text{sen}^2 x + (1 - \text{sen}^2 x) = \frac{7}{4} \Rightarrow 1 + \text{sen}^2 x = \frac{7}{4} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Daí, obtemos o conjunto solução:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

b) Resolva a equação $3 \text{ sen } x + \dfrac{7}{\text{cossec } x} = 11$.

Resolução: Para resolver a equação acima devemos lembrar que

$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ e utilizar essa relação na equação:

$$3 \text{ sen } x + 7 \text{ sen } x = 11 \ \Rightarrow \ 10 \text{ sen } x = 11 \ \Rightarrow \ \text{sen } x = \frac{11}{10} > 1$$

Assim, S = Ø.

Exemplo 3: (Fatoração Algébrica) Em muitas equações, é necessário combinar a fatoração algébrica com algum dos artifícios anteriores.

a) Resolva a equação $\text{sen } x - \text{sen}^3 x = 0$.

Resolução: Fatorando o 1º membro, temos:

$$\text{sen } x \, (1 - \text{sen}^2 x) = 0 \ \Rightarrow \ \text{sen } x \cos^2 x = 0$$

Daí,

$$\left.\begin{cases} \text{sen } x = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \cos^2 x = 0 \ \Rightarrow \ \cos x = 0 \ \Rightarrow \ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}\right\} \Rightarrow \ x = k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle| \ x = k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Resolva a equação $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \dfrac{1}{2}$.

Resolução: Fatorando o 1º membro, temos:

$$(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}_{=1} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \cos 2x = \frac{1}{2}$$

Daí, tiramos então que

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \Rightarrow \ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, seu conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle| \ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) Resolva a equação $\cos 3x + \text{sen } 2x = 0$.

Resolução: A resolução da equação $\cos 3x + \text{sen } 2x = 0$ é feita com a utilização de uma fórmula de transformação em produto:

$$\cos\ 3x + \text{sen}\ 2x = 0 \ \Rightarrow\ \cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$2\cos\left(\frac{3x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Daí,

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Rightarrow\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle|\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

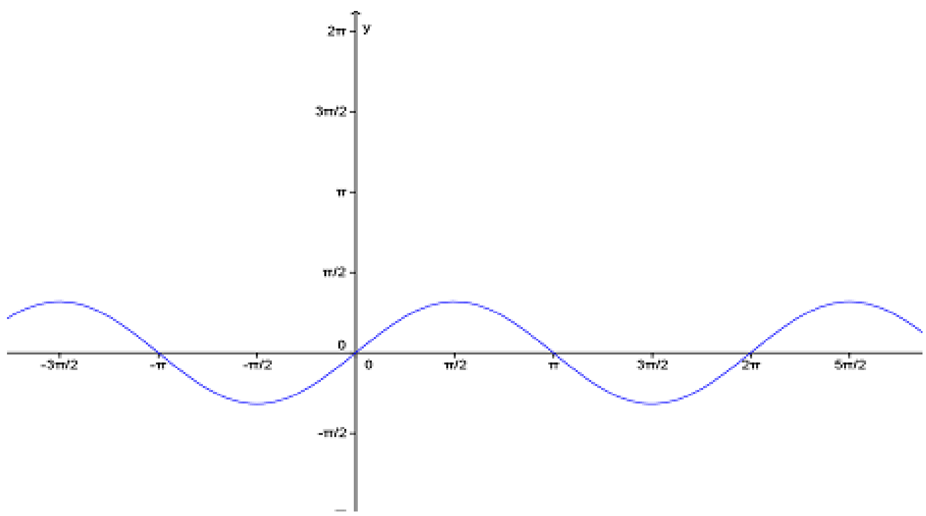
Observação: Há ainda outros artifícios algébricos, como a multiplicação e a divisão por um mesmo número real não nulo, a elevação ao quadrado de ambos os membros de uma equação (no caso, é necessário verificar as respostas) e outros, mas apenas a prática e o amadurecimento algébrico poderão conduzir à escolha do melhor caminho na resolução de cada equação isolada ou sistema de equações.

8.6. Função Seno

Seja f uma função definida por $f(x) = \text{sen}\ x$. Para construir o gráfico da função seno, vamos fazer uso da tabela:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	-1	0

O gráfico da função seno é dado por:



Conclusões:

- O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, ou seja, D(f) = $\mathbb{R}$, portanto, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de 0.
- O conjunto imagem da função é o intervalo [-1,1] ; portanto, a função seno assume como valor mínimo -1 e como valor máximo +1.

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

- A função seno é periódica e seu período é o número p = 2π , pois o valor de f(x) da função seno se repete a cada intervalo de amplitude 2π para valores de x.
- A função seno é ímpar, ou seja, sen(- x) = - sen x.

Exemplo 1: Quais valores que k pode assumir para tornar possível a igualdade $\text{sen } x = 2k - 5$?

Resolução: A função seno assume valores entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ Daí:

$$-1 \leq 2k - 5 \leq 1$$

Essa desigualdade pode ser resolvida como um sistema de inequações:

$$\begin{cases} -1 \leq 2k - 5 \\ 2k - 5 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k \leq -4 \\ 2k \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 2 \\ k \leq 3 \end{cases}$$

Identificando os valores de k, temos:

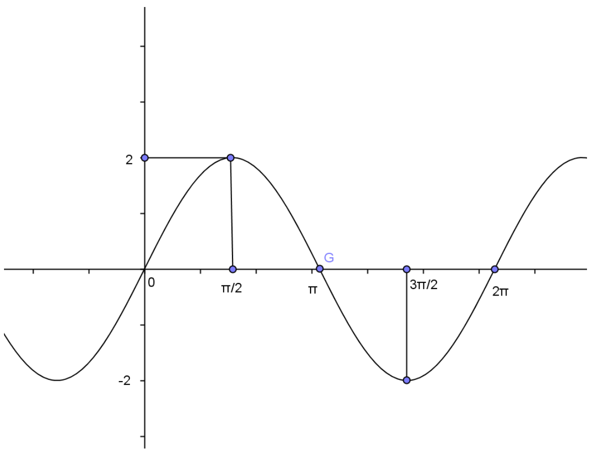
$$V = \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leq k \leq 3\}$$

Exemplo 2: Esboçar o gráfico da função e identificar o conjunto imagem e o período.

Resolução: Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	senx	y = 2senx
0	0	y = 2.0 = 0
$\pi/2$	1	y = 2.1 = 2
π	0	y = 2.0 = 0
$3\pi/2$	-1	y = 2.(-1) = -2
2π	0	y = 2.0 = 0

A imagem e período da função são dados, respectivamente, por . Seu gráfico é apresentado abaixo:

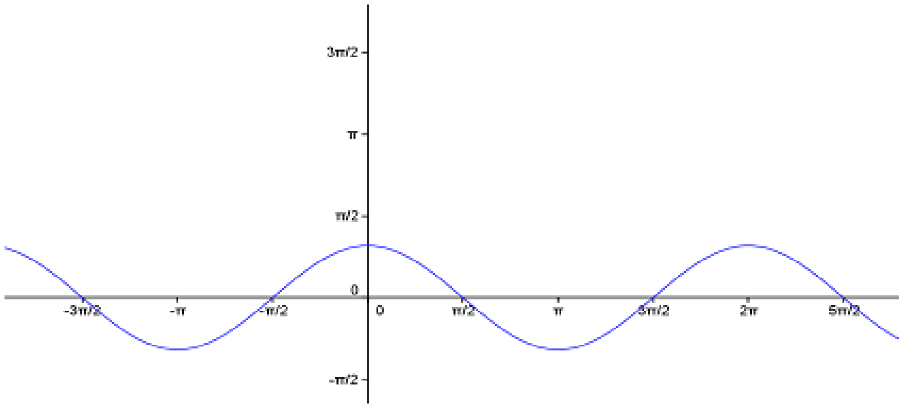


8.7. Função Cosseno

Seja f uma função definida por F(x) = cosx. Para construir o gráfico da função cosseno, vamos fazer uso da tabela:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	-1	0	1

O gráfico da função cosseno é dado por:



Conclusões:

- O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$, portanto, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de 0.
- O conjunto imagem da função é o intervalo [-1,1]; portanto, a função cosseno assume como valor mínimo -1 e como valor máximo +1.

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

- A função cosseno é periódica e seu período é o número p = 2π, pois o valor de f(x) da função cosseno se repete a cada intervalo de amplitude 2π para valores de x.
- A função cosseno é par, ou seja, cos(-x) = cos x.

Exemplo 1: Qual valor k pode assumir para tornar possível a igualdade $\cos x = 2k - 9$?

Resolução: A função cosseno assume valores entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq \cos\ x \leq 1$. Daí:

$$-1 \leq 2k - 9 \leq 1$$

Essa igualdade pode ser resolvida como um sistema de inequações:

$$\begin{cases} -1 \leq 2k - 9 \\ 2k - 9 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k \leq -8 \\ 2k \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 4 \\ k \leq 5 \end{cases}$$

Identificando os valores de k, temos:

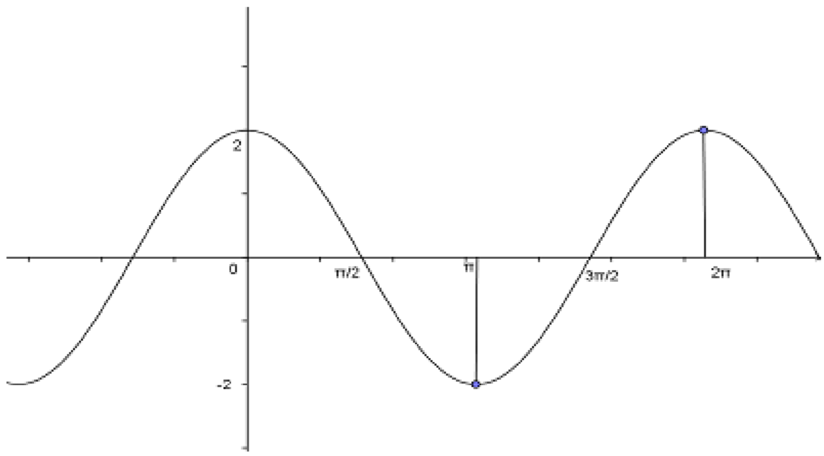
$$V = \{k \in \mathbb{R} \mid 4 \leq k \leq 5\}$$

Exemplo 2: Esboçar o gráfico da função $y = 2\cos x$ e identificar o conjunto imagem e o período.

Resolução: Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	cos x	y = 2cosx
0	1	y = 2.1 = 2
$\pi/2$	0	y = 2.0 = 0
π	-1	y = 2.(-1) = -2
$3\pi/2$	0	y=2.0=0
2π	1	y = 2.1 = 1

A imagem e período da função são dados, respectivamente, por . Seu gráfico é apresentado abaixo:

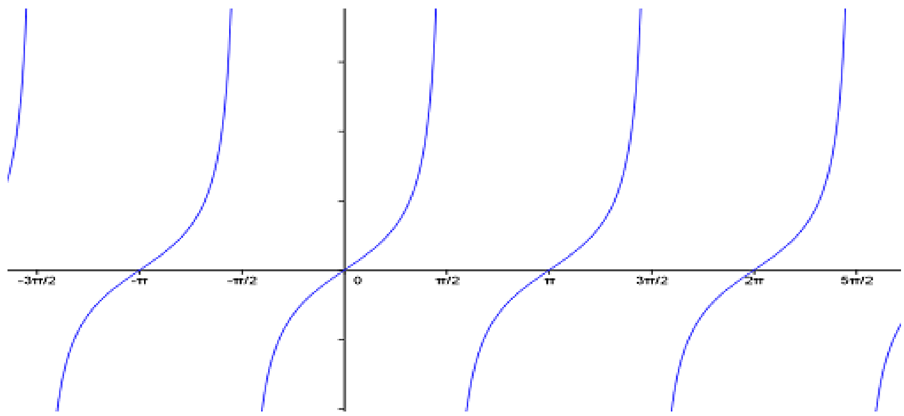


8.8. Função Tangente

Seja f uma função definida por F(x) = tg(x). Para construir o gráfico da função tangente, vamos fazer uso da tabela:

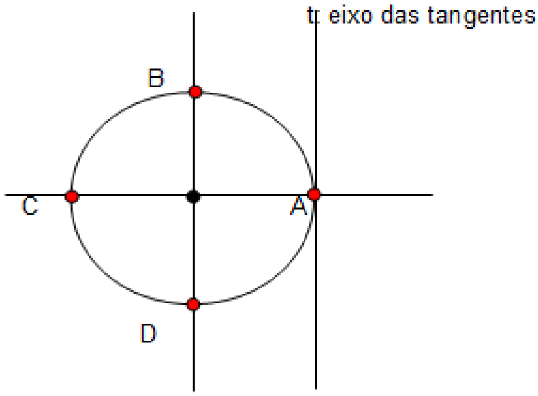
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

O gráfico da função tangente é dado por:



Conclusões:

- O domínio da função tangente é o conjunto das medidas dos arcos, cujas extremidades não coincidem nem com o ponto B, nem com o ponto D do ciclo trigonométrico, ou seja, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}\right\}$



- O conjunto imagem da função é o conjunto dos números reais, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}$.
- A função tangente é periódica e seu período é o número $p = \pi$.
- A função tangente é ímpar, ou seja, tg(-x) = tg x.

8.9. Um pouco de História

A palavra Trigonometria tem origem na Grécia da palavra *trigonos* (triângulo) + *metrûm* (medida). Etimologicamente, *trigonometria significa medida de triângulos*.

Por vezes, pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da Terra. No entanto, como ramo do conhecimento científico, é impossível separar a Trigonometria da Astronomia. Daí, que o seu desenvolvimento como ciência exata viesse a exigir medições e cálculos de grande precisão. É neste contexto que o astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) é considerado o fundador da Trigonometria. Foi ele que introduziu as medidas sexagesimais em Astronomia e elaborou a primeira tabela trigonométrica.

Hiparco utilizou a trigonometria para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e na navegação. A ele, seguiram-se outros no estudo e desenvolvimento da trigonometria, como Ptolomeu.

No séc.III, os indianos e os árabes deram nova dimensão à trigonometria ao introduzir a trigonometria esférica. A Trigonometria tem como objetivo principal o estudo das relações entre lados e ângulos de um triângulo e constitui instrumento indispensável na resposta a necessidades da Astronomia e ainda da navegação, cartografia e da topografia.

O estabelecimento de certas relações que hoje chamamos *fórmulas fundamentais da Trigonometria* deve-se aos matemáticos hindus, dos séculos V ao XII. Dentre eles, destaca-se Aryabhata (século VI), um astrônomo indiano, tendo já nesta altura associado o seno de um ângulo ao centro à medida da corda correspondente e elaborado também uma tábua de valores do seno.

Depois de traduzirem as obras deixadas pelos hindus, matemáticos árabes desenvolveram o estudo das razões trigonométricas em triângulos retângulos e estabeleceram, para qualquer triângulo, o chamado *teorema* ou *lei dos senos*.

A trigonometria começa a afirmar-se como ciência autônoma a partir do século XI, quando Al-Biurine reúne todas as demonstrações, quer de origem grega, quer de origem indiana, até então conhecidas e usadas em Trigonometria. Deve-

-se ainda aos árabes a introdução desta ciência na Europa Ocidental.

Na Europa, a instituição da Trigonometria, como ciência autônoma em relação à Astronomia, é iniciada com a tradução e publicação dos manuscritos clássicos, bem como a elaboração de uma introdução completa à Trigonometria, e ficou a dever-se a Johaness Müller, um astrônomo prussiano, tais textos conhecidos por Regiomontano(1436-1476). A obra de Regiomontano continha, por exemplo, a "Lei dos senos" aplicada a triângulos esféricos.

No século XVI, François Viète (1540-1603) estabeleceu várias relações trigonométricas, tendo-as associado às soluções de equações do 3º grau - é a ligação da trigonometria à Álgebra. Viète introduziu novos teoremas que permitiram relacionar lados e ângulos de triângulos não retângulos. Neper e Briggs usaram o cálculo logarítmico para estabelecerem novas fórmulas trigonométricas (século XVII) No século XIX, a trigonometria atinge o seu ponto máximo, ficando ligada à análise por meio das séries.

Atualmente, a Trigonometria não se limita a estudar os triângulos. Encontramos aplicações na mecânica, eletricidade, acústica, música, astronomia, engenharia, física, medicina, enfim, em muitos outros campos da atividade humana. Essas aplicações envolvem conceitos que, dificilmente, lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

Teste seu Conhecimento

1. Resolva as equações a seguir, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\text{tg } x = \text{sen } \pi$

2. Resolva as equações:

a) $\text{sen}^2 x = 3$ b) $\text{sen } 2x = \text{sen } 3x$ c) $4\cos^2 x - 3 = 0$

3. Resolva a equação $\cos 2x = \frac{1}{2}$, sendo $U = [0, 2\pi]$.

4. Resolva as equações:

a) $\text{sen}^2 x = 3 \text{ sen } x - 2$ b) $2\cos^2 x + \cos x = 1$

c) $\cos^3 x - \cos x = 0$ d) $\cos 3x - \cos x = 0$

e) $2 \text{ cossec } x - 1 = 3$ f) $-2 \text{ sen } 3x - 1 = 0$

5. Construa o gráfico das funções abaixo e identifique o conjunto imagem e o período.

a) $f(x) = 3\text{sen}x$

b) $f(x) = 2 + \text{sen}x$

6. Construa o gráfico das funções e identifique o conjunto imagem e o período.

a) $f(x) = 3 \cos x$

b) $f(x) = 2 + \cos x$

7. Encontre o domínio da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + \text{tg } 2x$.

8. Quais os valores de m pertencente aos reais para os quais temos $\text{tg}(x - \pi) = \frac{m+3}{m-1}$? E de $x \in \mathbb{R}$?

Gabarito

1. a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

2. a) $S = \emptyset$

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 2k\pi \text{ ou } x = (2k+1)\frac{\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

4. a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, X = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

e) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

f) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

5. a) $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -3 \le y \le 3 \}$ e período $= 2\pi$;

b) $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y \le 3 \}$ e período $= 2\pi$.

6. a) $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -3 \le y \le 3 \}$ e período $= 2\pi$;

b) $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y \le 3 \}$ e período $= 2\pi$.

7. $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

8. $m \neq 1$;

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Números Complexos

9.1. Introdução

Na resolução de uma equação algébrica, um fator fundamental é o conjunto universo que representa o contexto onde poderemos encontrar as soluções. Por exemplo, se estivermos trabalhando no conjunto dos números racionais, a equação $2x + 7 = 0$ terá uma única solução, dada por $x = -7/2$. Assim, o conjunto solução será:

$$S = \{ 7/2 \}$$

Mas, se estivermos procurando por um número inteiro como resposta, o conjunto solução será o conjunto vazio.

De forma análoga, ao tentar obter o conjunto solução para a equação $x^2+1 = 0$ sobre o conjunto dos números reais, obteremos como resposta o conjunto vazio, isto é, $S = \emptyset$. O que significa que não existe um número real que elevado ao quadrado seja igual a -1, mas se seguirmos o desenvolvimento da equação pelos métodos comuns, obteremos $x = \mathbb{R}\,[-1] = \sqrt{-1}$, onde $\mathbb{R}[-1]$ é a raiz quadrada do número real -1. Isto parece não ter significado prático e foi por esta razão que este número foi chamado imaginário, mas o simples fato de substituir R[-1] pela letra i (unidade imaginária) e realizar operações como se estes números fossem polinômios, faz com que uma série de situações tanto na Matemática como na vida, tenham sentido prático de grande utilidade e isto nos leva à teoria dos números complexos.

9.2. Definição

Um número complexo, na forma algébrica, é todo número que pode ser escrito, de modo único, na forma:

$$z = x + yi,$$

onde:

- x e $y \in \mathbb{R}$;
- x é chamado parte real do número complexo e é representado por Re(z);
- y é chamado parte imaginária do número complexo e é representado por Im(z);
- $i = \sqrt{-1}$, às vezes representado por $i^2 = -1$, é chamado unidade imaginária.

Notação: O conjunto de todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = x + yi$ é representado, na forma de par ordenado, pelo ponto P(x,y). O ponto P é chamado de imagem do complexo z. Frequentemente identificaremos os complexos a suas imagens escrevendo $(x,y) = x + yi$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de plano de Argand-Gauss.

Os números representados no eixo dos x são da forma $(x,0) = x + 0i = x$, isto é, são números reais. Os números complexos representados nos eixo dos y são da forma $(0,y) = 0 + yi = yi$. Esses complexos são chamados de *imaginários puros*.

9.3. Igualdade entre números complexos

Lembremos, inicialmente, que um número complexo pode ser representado como um par ordenado de números reais. Assim, dados dois números complexos $z_1=(a,b)$ e $z_2=(c,d)$, segue que $(a,b) = (c,d)$ quando $a = c$ e $b = d$. Escrevendo z_1 e z_2 na forma algébrica, obtemos a igualdade:

$$\underbrace{a+bi}_{z_1} = \underbrace{c+di}_{z_2}, \text{ quando } a = c \text{ e } b = d,$$

Isto é, dois números complexos são iguais quando apresentam, simultaneamente, partes reais e partes imaginárias iguais.

Exemplo: Vamos determinar os números reais x e y na igualdade

$$(x-1)+i = 3+(2y-3)i$$

$$\begin{cases} x-1 = 3 \\ 2y-3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = 2$$

9.4. Adição e Subtração de Números Complexos

Vamos lembrar que a definição de adição de pares ordenados, dados $z_1=(a,b)$ e $z_2=(c,d)$, tem-se que $z_1+z_2=(a+b,c+d)$.Escrevendo esses pares na forma algébrica, obtemos a igualdade:

$$\underbrace{(a+bi)}_{z_1}+\underbrace{(c+di)}_{z_2} = \underbrace{(a+c)+(b+d)i}_{z_1+z_2}$$

Isto significa que, para somar dois números complexos, devemos somar separadamente suas partes reais e suas partes imaginárias.

A mesma ideia se aplica a subtração:

$$\underbrace{(a+bi)}_{z_1}-\underbrace{(c+di)}_{z_2} = \underbrace{(a-c)+(b-d)i}_{z_1-z_2}$$

Exemplo 1: Efetue as operações abaixo.

a) $(1+3i)+(-2+4i) = (1-2)+(3+4)i = -1+7i$

b) $(4+2i)-(3+5i)=(4-3)+(2-5)i=1-2i$

Observe que, na adição e subtração, podemos operar eliminando parênteses e reduzindo os "termos semelhantes", como fazemos com expressões algébricas.

Exemplo 2: Sendo, $z_1 = (1,x-3)$ e $z_2=(2y,-1)$, determinemos x e y de modo que $z_1+z_2=(3,-5)$.

1ª Resolução: Sabemos que $z_1+z_2=(3,-5)$. Então

$$z_1+z_2=(1,x-3)+(2y,-1) = (1+2y,x-3-1)=(1+2y,x-4)$$

$$z_1+z_2 = 1+(x-3)i+2y-i = (1+2y)+(x-3-1)i$$

Daí, devemos ter:

$$(1+2y,x-4) = (3-5) \Rightarrow \begin{cases} 1+2y = 3 \\ x-4 = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ e } x = -1$$

2ª Resolução: Escrevendo os pares na forma algébrica, temos:

$$z_1 = 1+(x-3)i,\ z_2 = 2y-i \text{ e } z_1+z_2 = 3-5i\ ;$$

$$z_1+z_2 = 1+(x-3)i+2y-i = (1+2y)+(x-3-1)i$$

Então, devemos ter:

$$(1+2y)+(x-4)i = 3-5i$$

Igualando as partes reais e imaginárias obtemos:

$$\begin{cases} 1+2y=3 \\ x-4=-5, \end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ e } y=1$$

Propriedades: Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

a) Associativa: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3), \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Exemplo: Sejam $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+2i$ e $z_3 = 4i$ então:

$$(z_1+z_2)+z_3 = (2+3i+1+2i)+4i = 3+5i+4i = 3+9i$$

$$z_1+(z_2+z_3) = 2+3i+(1+2i+4i) = 2+3i+1+6i = 3+9i$$

b) Comutativa: $z_1+z_2 = z_2+z_1, \forall\, z_1, z_2 \in$ £.

Exemplo: Sejam $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 3+4i$, então:

$$z_1+z_2 = 1+i+3+4i = 4+5i$$

$$z_2+z_1 = 3+4i+1+i = 4+5i$$

9.5. Multiplicação de Números Complexos

Dados dois números complexos, $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$, para determinar o produto entre os dois, devemos aplicar a propriedade distributiva, lembrando que $i^2 = 1$ e depois reduzir os "termos semelhantes". Ao multiplicarmos z_1 e z_2 teremos:

$$z_1 \,.\, z_2 = (a+bi).(c+di) = ac+adi+bci+bd\,i^2$$

$$= (ac-bd)+(ad+bc)i, \text{ pois } i^2 = -1$$

Portanto,

$$z_1 \,.\, z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Exemplo 1: Vamos efetuar a multiplicações:

a) $(3+4i).(1-2i) = 3-6i+4i-8\underbrace{i^2}_{=-1} = 3-2i-8.(-1) = 11-2i$

b) $(-2+5i).(2+2i) = -1-4i+10i+10\underbrace{i^2}_{=-1} = 1+6i+10.(-1) = -9+6i$

c) $(1+3i)^2 = 1^2+2.1.3i+(3i)^2 = 1+6i+9\underbrace{i^2}_{=-1} = 1+6i+9.(-1) = -8+6i$

Exemplo 2: Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que se tenha $(x+yi).(3-2i) = -2+10i$.

Resolução: Sabemos que $(x+yi).(3-2i) = -2+10i$. Fazendo a multiplicação obtemos:

$$\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ -2x+3y=10 \end{cases} \Rightarrow x=-2 \text{ e } y=2$$

Propriedades: Sejam

a) Associativa: $[z_1.z_2].z_3 = z_1.[z_2.z_3]$, $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Exemplo: Considere $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 2 + 3i$

$$
\begin{aligned}
[z_1.z_2].z_3 &= [(1 + 3i).(1 + i)].(2 + 3i)\\
&= [(1.1 + 3i + i + 3i^2)].(2 + 3i)\\
&= [(1 - 3 + 1i + 3i)].(2 + 3i)\\
&= (-2 + 4i).(2 + 3i)\\
&= (-2).2 + (-2).3i + 2.4i + 4.3i^2\\
&= - 4 -12 - 6i + 8i\\
&= -16 + 2i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1.[z_2.z_3] &= (1 + 3i).[(1 + i).(2 + 3i)]\\
&= (1 + 3i).[(1.2 + 1.3i + 2i + 3i^2)]\\
&= (1 + 3i).[(2 - 3 + 3i + 2i)]\\
&= (1 + 3i).(-1 + 5i)\\
&= 1.(-1) + 1.5i + 3i.(-1) + 3.5i^2\\
&= - 1 - 15 + 5i - 3i\\
&= -16 + 2i
\end{aligned}
$$

Portanto, como queríamos demonstrar,

$$z_1.[z_2.z_3] = [z_1.z_2].z_3\ ,\ \forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

b) Comutativa: $z_1.z_2 = z_2.z_1$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Exemplo: Considere $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 1 + 5i$

$$z_1.z_2 = (2 + 3i).(1 + 5i) = (2.1 + 2.5i + 1.3i + 3.5i^2) = 2 - 15 + 10i + 3i = -13 + 13i$$

$$z_2.z_1 = (1 + 5i).(2 + 3i) = (1.2 + 1.3i + 2.5i + 5.3i^2) = 2 - 15 + 3i + 10i = -13 + 13i$$

Portanto, como queríamos demonstrar, $z_1.z_2 = z_2.z_1$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

c) Distributiva: Em £, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição, ou seja, $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$, $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Exemplo: Considere $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 2 + 3i$.

$$
\begin{aligned}
z_1.(z_2 + z_3) &= (1 + 3i).\left[(1 + i)+(2 + 3i)\right]\\
&= (1 + 3i).[1 + 2 + i + 3i]\\
&= (1 + 3i).(3 + 4i)\\
&= 1.3 + 1.4i + 3.3i + 3.4i^2\\
&= 3 - 12 + 4i + 9i\\
&= -9 + 13i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1.z_2 + z_1.z_3 &= (1 + 3i).(1 + i) + (1 + 3i).(2 + 3i)\\
&= \left(1.1 + i + 1.3i + 3i^2\right) + \left(1.2 + 1.3i + 2.3i + 3.3i^2\right)\\
&= (1 - 3 + i + 3i) + (2 - 9 + 3i + 6i)\\
&= (- 2 + 4i) + (- 7 + 9i)\\
&= - 2 - 7 + 4i + 9i\\
&= -9 + 13i
\end{aligned}
$$

Portanto $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$, $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

9.6. Conjugado de um Número Complexo

Dado um número complexo, na forma algébrica, $z = a + bi$, dizemos que seu conjugado é da forma $\bar{z} = a - bi$.

Exemplo: Vamos obter o conjugado dos seguintes números complexos:

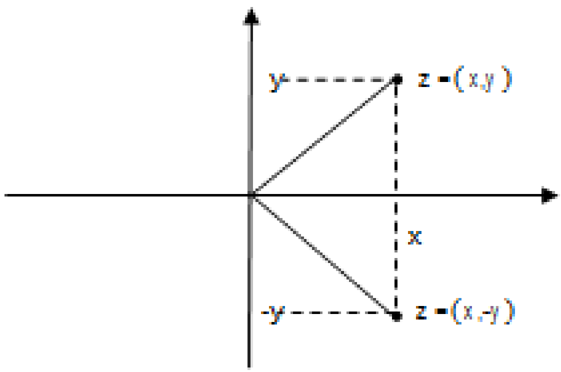
a) $z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$

b) $z = -2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = -2 + 5i$

c) $z = 10 \Rightarrow \bar{z} = 10$

d) $z = 2i \Rightarrow \bar{z} = -2i$

Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo x, isto é, considerando $z = (x,y)$, seu conjugado é dado por $\bar{z} = (x,-y)$.



Propriedades: Se z_1 e z_2 são números complexos, então:

a) $\overline{\left(z_1 . z_2\right)} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

b) $\overline{\left(z_1 + z_2\right)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

c) $\overline{\left(z_1 - z_2\right)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

d) $\left(\overline{z_1 . z_2}\right) = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

e) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

Teorema: Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos:

i) $z + \bar{z} = 2.\text{Re}(z)$

ii) $z - \bar{z} = 2.\text{Im}(z).i$

iii) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \text{i}$

Demonstração: Fazendo $z = x + yi$, temos:

i) $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2.\text{Re}(z)$

ii) $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2.\text{Im}(z).i$

iii) $z = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi) = (x - yi) \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

9.7. Divisão de Números Complexos

Sejam dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, sendo $z_2 \neq 0$

. Dividir z_1 por z_2 é obter um número complexo $z_3 = x + yi$ tal que $\frac{z_1}{z_2} = z_3$, ou seja, $z_1 = z_2.z_3$.

Para determinar z_3, basta multiplicarmos numerador e denominador do quociente $\frac{z_1}{z_2}$ pelo conjugado do denominador, ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \underbrace{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)}_{\text{parte real}} + \underbrace{\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i}_{\text{parte imaginária}}$$

Exemplo: Vamos efetuar as divisões:

a) $\frac{2 - i}{i} = \frac{2 - i}{i}.\frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-2i + i^2}{-i^2} = 1 - 2i$

b) $\frac{3i}{-2 + 3i} = \frac{3i}{-2 + 3i}.\frac{(-2 - 3i)}{(-2 - 3i)} = \frac{-6i - 9i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-6i + 9}{4 + 9} = \frac{-6i + 9}{13} = \frac{9}{13} - \frac{6}{13}i$

9.8. Potências de Números Complexos

Seja *i* a unidade imaginária. Vamos calcular i^n para alguns valores naturais de *n*. Temos

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$
$i^1 = 1$	$i^5 = i^4.i = 1.i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1$
$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$	$i^7 = i^6.i = (-1).i = -i$

Como vemos, os resultados de i^n $(n \in \mathbb{N})$ com o expoente *n* variando, repetem-se de quatro em quatro unidades. Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$:

- $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$ (o expoente 4n representa os números que são divisíveis por 4).
- $i^{4n+1} = i^{4n}.i^1 = 1.i = i$ (o expoente 4n + 1 representa os números que, divididos por 4, deixam resto 1).
- $i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = 1.(-1) = -1$ (o expoente 4n + 2 representa os números que, divididos por 4, deixam resto 2).
- $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = 1.(-i) = -i$ (o expoente 4n + 3 representa os números que, divididos por 4, deixam resto 3).

Dessa forma, para calcular i^n basta calcular i^r, sendo *r* o resto da divisão de *n* por 4.

Exemplo: Vamos calcular

a) i^{78}

- Resolução: Primeiro dividimos 78 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 78 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{38} & 19 \\ \text{resto} \rightarrow \ 2 & \end{array}$$

Então, $i^{78} = i^{\text{resto}} = i^2 = -1$.

b) i^{50}

- Resolução: Primeiro dividimos 52 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 52 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{52} & 13 \\ \text{resto} \rightarrow \ 0 & \end{array}$$

Então, $i^{50} = i^{\text{resto}} = i^0 = 1$.

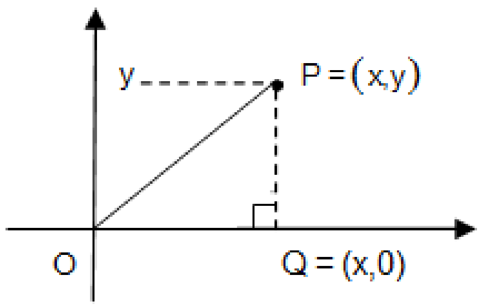
c) $z = (-2i)^8$

$$(-2i)^8 = \left[(-2).i\right]^8 = (-2)^8.i^8 = 256.i^8$$

Como $i^8 = i^0 = 1$, o resultado procurado é $256.1=256$.

9.9. Módulo de um Número Complexo

Seja a forma algébrica de um número complexo, cujo afixo ou imagem geométrica é o ponto . Vamos supor que P pertença ao 1º quadrante, como indica na figura:



Unindo P à origem O, obtemos o segmento $\overline{OP}$. O triângulo PQO é retângulo em Q. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$\left(\overline{OP}\right)^2 = \left(\overline{OQ}\right)^2 + \left(\overline{PQ}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{OP}\right)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A medida de $\overline{OP}$, assim obtida, é chamada *módulo* de um número complexo e a indicamos por |z|. Dessa maneira, o módulo de um número complexo z é a distância entre a origem e a imagem geométrica de z.

Exemplo: Vamos calcular o módulo de cada um dos números complexos:

a) $z = 2 \Rightarrow |z| = |2| = 2$

b) $z = 3i \Rightarrow |z| = |3i| = 3$

c) $z = -4 \Rightarrow |z| = |-4| = 4$

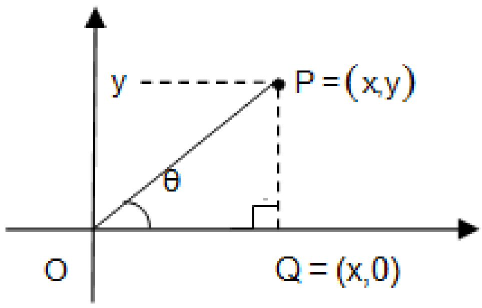
d) $z = -i \Rightarrow |z| = |-i| = 1$

e) $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

f) $z = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i \Rightarrow |z| = \left|\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9 + 16}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$

9.10. Argumento

Consideremos o ângulo θ formado pelo segmento $\overline{OP}$ e pelo semieixo real positivo, tomado a partir desse semieixo, no sentido anti-horário. O ângulo θ é chamado *argumento principal ou argumento de z*.



Observe que θ é tal que: $0 \le \theta < 2\pi$ e:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{y}{|z|} \\ \cos \theta = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{x}{|z|} \end{cases}$$

pois, como vimos na seção anterior, $\overline{OP} = |z|$.

Exemplo 1: Determinar o argumento de $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Resolução: Primeiro vamos determinar o módulo de z:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1 + 3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Então:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Da Trigonometria, segue que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, ou seja, $\theta = 60°$.

Exemplo 2: Qual é o argumento de $z = -1 + i$?

Resolução: Primeiro vamos calcular o módulo de z:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Então:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Da Trigonometria, segue que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, ou seja, $\theta = 135°$.

9.11. Fórmula Trigonométrica ou Polar de um Número Complexo

Seja $z = x + yi \neq 0$ um número complexo, vimos que o argumento θ de z satisfaz:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z|.\text{sen } \theta \\ \cos \theta = \dfrac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z|.\cos \theta \end{cases}$$

Substituindo tais valores na forma algébrica $z = x + yi$, vem:

$$z = |z|.(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$$

que é a forma trigonométrica de um número complexo.

Essa forma trigonométrica será muito utilizada nas operações de potenciação e radiciação nos complexos.

Exemplo: Vamos escrever na forma trigonométrica o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.

Resolução: Primeiro vamos determinar o módulo de z:

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2;$$

Daí:

$$\begin{cases} \sin \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \;\; (\text{ou } 60^\circ)$$

Então, a forma trigonométrica é dada por $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \text{ sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$.

9.12. Operações na Forma Trigonométrica

Considere dois números complexos na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|.\cos \theta_1 + i \text{ sen}\theta_1) \text{ e } z_2 = |z_2|.(\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$$

Definiremos agora algumas operações na forma trigonométrica.

1) Multiplicação: Vamos encontrar o valor de $z_1.z_2$ na forma trigonométrica. Temos:

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Observe que o número complexo obtido é tal que:

- Seu módulo é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2;
- Seu argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

Exemplo: Sendo $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \text{ sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Então,

$$z_1.z_2 = 2.3.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1.z_2 = 6.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \text{ sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

2) Divisão: Vamos encontrar uma expressão para $\dfrac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica. Temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2)]$$

Note que o número complexo obtido é tal que:

- Seu módulo é igual ao quociente entre os módulos de z_1 e z_2;
- Seu argumento é igual à diferença entre o argumento de z_1 e o argumento de z_2.

Exemplo:

Sejam $z_1 = 8.\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \text{ sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 2.\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \text{ sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Encontre $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}.\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4.\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$$

3) Potenciação: O cálculo da potência z^n, com $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, fica trabalhoso quando escrevemos na forma algébrica, já que temos que desenvolver o Binômio de Newton.

Considerando a forma trigonométrica $z = |z|.(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, utilizando a expressão para o produto na forma trigonométrica e $z^n = \underbrace{z.z.z.z.\ \ldots\ z}_{\text{n vezes}}$, obtemos:

$$z^n = \underbrace{|z|.|z|.|z|.|z|.\ \ldots\ |z|}_{\text{n vezes}}.[\cos\underbrace{(\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\text{n vezes}} + i\,\text{sen}\underbrace{(\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\text{n vezes}}]$$

$$z^n = |z|^n.\left[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right]$$

Este resultado é conhecido como *Fórmula de Moivre.*

Exemplo: Vamos obter o valor de $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

Seja $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, é preciso escrever z na forma trigonométrica.

Temos:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

Assim, a forma trigonométrica de z é:

$$z = 1.(\cos 60° + i\ \text{sen}\ 60°)$$

Pela Fórmula de Moivre, vem:

$$z^6 = 1^6.(\cos 6.60° + i\ \text{sen}\ 6.60°)$$

$$z^6 = \cos 360° + i\ \text{sen}\ 360°$$

$$z^6 = 1$$

4) Radiciação nos complexos: Seja z um número complexo, dizemos que z_k é uma raiz enésima de z se $(z_k)^n = n$. Vejamos alguns exemplos:

- Uma das raízes quadradas de – 1 é i, pois $i^2 = -1$.
- Uma das raízes cúbicas de – i é i, pois $i^3 = -i$.
- Uma das raízes quartas de 16 é 2i, pois $(2i)^4 = 16$.

Exemplo: Vamos encontrar as raízes quadradas de $z = 4 + 4\sqrt{3}\ i$.

Resolução: Primeiro vamos calcular o módulo de z.

$$|z| = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

Agora vamos determinar o argumento θ de z.

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Então, a forma polar de z é dada por:

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \text{ sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

O mais trabalhoso é determinar $z_k \in \mathbb{C}$ tal que $z_k^2 = z$.

Fazendo $z_k = |z|.(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, segue a igualdade:

$$\left[|z|.(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)\right]^2 = 8.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \text{ sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Usando a fórmula de Moivre:

$$\begin{cases} |z|^2 = 8 \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 2\sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Atribuindo valores inteiros para k a fim de obter z_k:

- Se $k = 0, \ \theta = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow z_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \text{ sen}\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}\, i$

- Se $k = 1, \ \theta = \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \text{ sen}\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i$

- Se $k = 2, \ \theta = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$ que é côngruo a $\dfrac{\pi}{6}$. Dessa forma, o número complexo que iríamos encontrar coincidiria com a primeira raiz de z_0 obtida.

9.13. Um pouco de História

Quando resolvemos a equação do 2° grau , por exemplo, utilizando a fórmula de Báskara, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.5}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de x, é preciso calcular a raiz quadrada de -16. Em $\mathbb{R}$, porém, isso é impossível, pois não existe um número m real tal que $m^2 = -16$.

A necessidade de obter uma solução para esse tipo de problema levou os matemáticos a procurar novos conjuntos em que "o quadrado de certo elemento pudesse ser negativo". Um primeiro avanço importante foi dado por Girolamo Cardano (1501-1576), que considerou o seguinte problema prático:

"Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40".

Chamando uma das partes de x, a outra será expressa por 10 - x, donde segue a equação.

$$x.(10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$$

que nos fornece $x = 5 \pm \sqrt{-15}$. Como em $\mathbb{R}$ não existe m tal que $m^2 = -15$, a equação não teria solução e não haveria uma construção possível para o problema. Mesmo assim, Cardano deu um passo adiante. Trabalhando com os radicais negativos "como se fossem números", as duas partes do segmento teriam comprimentos:

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right) \text{ e } 10 - \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 5 - \sqrt{-15}$$

De fato,

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right).\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 - 15 = 10$$

Esses cálculos mostravam que os "números" $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram soluções da equação algébrica $x^2 - 10x + 40 = 0$, ainda que não se soubesse o significado de "números" desse tipo.

Anos depois, Rafhael Bombeli (1526 – 1573) teve contato com a obra Ars magna, de Cardano, e ao aplicar suas fórmulas, Bombeli provou que seria possível prosseguir o cálculo de x com raízes de números negativos e, pela primeira vez, admitia-se a possibilidade da existência de um "número" da forma $a + \sqrt{-b}$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$.

O reconhecimento de números dessa natureza na matemática só ganhou impulso e legitimação com uma poderosa interpretação geométrica, proposta por Gauss (1777– 1855).

Faremos aqui um pequeno resumo da evolução dos números complexos:

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido, em 1629, por Albert Girard.
- O símbolo *i* foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler, em 1777. Apareceu impresso, pela primeira vez, em 1794, e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss, em 1801.
- Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes, em 1637.
- A expressão número *complexo* foi introduzida por Cari Friederich Gauss, em 1832.

Teste seu Conhecimento

1. Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = -4 - 5i$

c) $z = 5i$

d) $z = 6$

2. Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que $z = -1 + (2 - m).i$ seja um número real.

3. Determine $k \in \mathbb{R}$, de modo que $z = 2 + (k^2 - 16)i$ seja um número real.

4. Determine $n \in \mathbb{R}$, de modo que $z = 7n + 1 + 6i$ seja um número imaginário puro.

5. Determine $r \in \mathbb{R}$, de modo que $z = \left(1 - \dfrac{3r}{2}\right) + 2i$ seja um número imaginário puro.

6. Dado $z = (p - 5) + (p^2 - 25).i$, determine p real, de modo que z seja um número real não nulo.

7. Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$

b) $4x^2 + 20 = 0$

8. Determine x e y reais de modo que $x + (3y)i = -4 + 5i$

9. Determine a e b reais de modo que $3a + (-2b)i = -3 + 4i$

10. Efetue:

a) $(3 + i) + (-1 - 2i)$

b) $(4 + 5i) + (-1 - i) - (6 + 4i)$

c) $4i - (3 + 2i) - (-2 - 3i)$

d) $-1 + (3 + i) + (-2 + 4i) - (3 - i)$

11. Dados os números complexos $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = 5 + 4i$, determine:

a) $z_1 - z_2 - z_3$

b) $(z_1 + 1) + (z_2 + z_3)$

12. Efetue:

a) $(2 + 3i).(-1 - i)$

b) $(-4 + 2i).(1 + i)$

c) $(1 - 2i) + (3 - i).(-1 - i)$

d) $(1 + i).(4 + i) - (-2 - 2i)$

13. Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que se tenha $(x + yi).(3 + 2i) = 5 - i$.

14. Efetue:

a) $\overline{2 + 2i} - i.(1 - i)$

b) $\overline{6 - 4i} + \overline{3 - 2i}$

15. Dados $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = -3 - i$, determine:

a) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 + z_2}$

c) Compare os resultados obtidos em a e b.

16. Efetue:

a) $\dfrac{2 - 3i}{1 + i}$

b) $\dfrac{-3 - 2i}{-1 - i}$

17. Dado o número complexo $z = 5 + 4i$, determine $(z)^{-1}$.

18. Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que o número $z = \dfrac{1 + 2i}{2 + ai}$ seja real.

19. Efetue:

a) i^{50}

b) i^{125}

c) $(-i)^{33}$

d) $\frac{i^{45}+i^{22}}{i^{10}}$

20. Calcule o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z=-1+5i$

b) $z=2+6i$

c) $z=-4i$

d) $z=\sqrt{10}$

21. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:

a) $z = 4 + 4i$

b) $z = -2 + 2i$

c) $z = i$

d) $z = 16$

22. Escrever na forma trigonométrica os números complexos:

a) $z = \sqrt{3} + i$

b) $z = 2 - 2i$

23. Sendo $z_1=\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i$ e $z_2= -\frac{2}{3} - \frac{3}{5}i$, dê a representação trigonométrica de $z_1 - \overline{z_2}$.

24. Dados os números complexos, faça os cálculos solicitados:

a) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$, calcule z^3.

b) $z = 4i$, calcule z^2.

c) $z = \sqrt{3} + i$, calcule z^6.

d) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$, calcule z^8.

25. Dado o número complexo $z = 1 - i$, determine o valor de $\frac{1}{z^2}$.

Gabarito

1.a) $Re(z) = 2$ e $Im(z) = 3$

b) $Re(z) = -4$ e $Im(z) = -5$

c) $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 5$

d) $Re(z) = 6$ e $Im(z) = 0$

2. $m = 2$

3. $k = \pm 4$

4. $n = -\frac{1}{7}$

5. $r = \frac{2}{3}$

6. $p = -5$

7. a) $x = 2 \pm 3i$

b) $x = \pm \sqrt{5}i$

8. $x = -4$ e $y = \frac{5}{3}$

9. $a = -1$ e $b = -2$

10. a) $2 - i$

b) -3

c) $-1 + 5i$

d) $-3 + 6i$

11. a) $-2 - 6i$

b) 7

12. a) $1 - 5i$

b) $-6 - 2i$

c) $-3 - 4i$

d) $5 + 7i$

13. $x = 1$ e $y = -1$

14. a) $1 - 3i$

b) $9 + 6i$

15. a) $1 - 2i$

b) $1 - 2i$

16. a) $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

b) $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

17. $\frac{5}{41} - \frac{4}{41}i$

18. $a = 4$

19. a) -1

b) i

c) -1

d) $1 - i$

20. a) $\sqrt{26}$

b) $2\sqrt{10}$

c) 4

d) 10

21. a) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$

c) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\theta = 0°$

22. a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

23. $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

24. a) -8

b) -16

c) -64

d) 256

25. $\dfrac{1}{z^2} = -2i$

Binômio de Newton

10.1. Introdução

Usando produtos notáveis, sabemos que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\ (a+b)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

De modo análogo, podemos calcular as quintas e sextas potências e, de modo geral, obter o desenvolvimento da potência $(a + b)^n$, a partir da anterior, ou seja, de $(a + b)^{n-1}$. Porém, quando o valor de n é grande, este processo gradativo de cálculo é muito trabalhoso.

Existe um método para desenvolver a enésima potência de um binômio, conhecido como **binômio de Newton** (Isaac Newton, matemático e físico inglês, 1642-1727). Para esse método, é necessário saber o que são coeficientes binomiais, algumas de suas propriedades e o triângulo de Pascal.

10.2. Números Binomiais

Se n e p são dois números naturais, com $n \geq p$, chama-se *número binomial* de classe *p* ao número $\binom{n}{p}$ definido por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Notação: $\binom{n}{p} = C_{n,\,p}$

Para qualquer n natural, temos:

$$C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$C_{n,0} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1.n!} = 1$$

$$C_{n,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$$

Exemplos:

1) $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5.4.3!}{3!2!} = \dfrac{5.4}{2.1} = \dfrac{20}{2} = 10$

2) $C_{4,1} = \binom{4}{1} = \dfrac{4!}{1!(4-1)!} = \dfrac{4.3!}{1!3!} = \dfrac{4}{1} = 4$

3) $C_{6,6} = \binom{6}{6} = \dfrac{6!}{6!(6-6)!} = \dfrac{6!}{6!0!} = 1$

$$4)\ C_{3,0} = \binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$5)\ C_{0,0} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1.1} = 1$$

10.3. Números Binomiais Complementares

Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ de mesmo numerador são complementares quando $p + q = n$.

Exemplos:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4.3!}{2.1.3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Note que dois números binomiais complementares são iguais.

10.4. Propriedades de Números Binomiais

Seguem abaixo duas propriedades de números binomiais:

P1) Se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, então: $p = q$ ou $p + q = m$.

Exemplo:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}, \text{ pois } 3 + 2 = 5$$

P2) A Relação de Stifel, também conhecida como regra de Pascal, é representada pela seguinte igualdade:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

onde n e k são números naturais não-nulos, com $n > k$.

Exemplo:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

10.5. Triângulo Pascal

A determinação de números binomiais pode ser obtida por meio de um dispositivo prático chamado *triângulo de Pascal,* que é construído com base na teoria e propriedade dos números binomiais.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	Resultados
0	$\binom{0}{0}$							1
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						1 1
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					1 2 1
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				1 3 3 1
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			1 4 6 4 1
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		1 5 10 10 5 1
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	1 6 15 20 15 6 1

Os resultados são os coeficientes dos termos do desenvolvimento binomial.

10.7. Propriedades do Triângulo de Pascal

P1) Toda linha começa e termina por 1: de fato, o 1º elemento de uma linha qualquer é $\binom{k}{0} = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, e o último elemento dessa linha é $\binom{k}{k} = 1$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

P2) Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Vejamos, por exemplo:

$$\text{Linha 5: } \begin{array}{cccccc} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Linha 7:

$$\binom{7}{0} = 1 \quad \binom{7}{1} = 7 \quad \binom{7}{2} = 21 \quad \binom{7}{3} = 35 \quad \binom{7}{4} = 35 \quad \binom{7}{5} = 21 \quad \binom{7}{6} = 7 \quad \binom{7}{7} = 1$$

A justificativa dessa propriedade está no fato de que estes coeficientes binomiais são complementares e, portando, iguais.

P3) A partir da linha 2, notamos que cada elemento x (com exceção do primeiro e do último) é igual à soma de dois elementos da linha anterior: o elemento imediatamente acima de x e o anterior a este. Vejamos:

$$\underbrace{1 \quad + \quad 1}_{2}$$

$$1 \qquad 2$$

$$1 \qquad \underbrace{3 \quad + \quad 3}_{6} \qquad 1$$

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad \underbrace{4 \quad + \quad 1}_{5}$$

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

Essa propriedade é conhecida com *relação de Stifel* e pode ser generalizada por:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \; n \geq p$$

P4) A soma dos elementos da linha de numerador k é igual a 2^K**. Temos:**

$$
\begin{array}{llll}
\text{linha } 0: & 1 & \Rightarrow 1 & = 2^0 \\
\text{linha } 1: & 1 \quad 1 & \Rightarrow 1+1 & = 2^1 \\
\text{linha } 2: & 1 \quad 2 \quad 1 & \Rightarrow 1+2+1 & = 2^2 \\
\text{linha } 3: & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & \Rightarrow 1+3+3+1 & = 2^3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\text{linha } k: & \binom{k}{0} \; \binom{k}{1} \; \ldots \; \binom{k}{k} & \Rightarrow \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k} & = 2^k
\end{array}
$$

10.8. Binômio de Newton

A fórmula de binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de $(x + a)^n$, onde:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}.x^n.a^0 + \binom{n}{1}.x^{n-1}.a^1 + \binom{n}{2}.x^{n-2}.a^2 + \ldots + \binom{n}{n}.x^0.a^n$$

Note que a soma dos expoentes de *x* e *a* é sempre *n*.

Exemplos:

a) n = 0

$$(x+a)^0 = \binom{0}{0}.x^0.a^0 = 1$$

b) n = 1

$$(x+a)^1 = \binom{1}{0}.x^1.a^0 + \binom{1}{1}.x^0.a^1 = 1.x + 1.a = x + a$$

Observe que os coeficientes estão de acordo com os resultados da segunda linha de triângulo de Pascal.

c) n = 2

$$(x+a)^2 = \binom{2}{0}.x^2.a^0 + \binom{2}{1}.x^1.a^1 + \binom{2}{2}.x^0.a^2 = 1.x^2.1 + 2.x.a + 1.1.a^2$$

$$= x^2 + 2xa + a^2$$

Observe que os coeficientes estão de acordo com os resultados da terceira linha do triângulo de Pascal.

10.9. Termo Geral do Binômio de Newton

Todo termo do desenvolvimento do binômio de Newton pode ser representado pela expressão:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$$

Exemplo 1: Determinar o termo em x^3 no desenvolvimento do binômio $(x+4)^5$.

Resolução: Como o expoente de x deve ser igual a 3, devemos ter 5 – p = 3, logo p = 2. Então, substituindo p = 2, temos:

$$T_{2+1} = \binom{5}{2}.x^{5-2}.4^2$$

$$T_3 = 10.x^3.16$$

$$T_3 = 160x^3$$

Exemplo 2: Determinar o termo geral do desenvolvimento do binômio $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4$.

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{4}{p}.\left(x^2\right)^{4-p}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p}.x^{8-2p}.\left(-x^{-2p}\right)$$

$$T_{p+1} = -\binom{4}{p}.x^{8-4p}$$

10.10. Curiosidade

"O triângulo de Pascal é mesmo de Pascal?"

A denominação deste triângulo varia muito ao longo do mundo. Os *franceses* o chamam **triângulo de Pascal**, os *chineses* chamam-no de **triângulo de Yang Hui**, os *italianos* chamam-no de **triângulo de Tarataglia** e encontramos outras denominações, como **triângulo de Tartaglia-Pascal** ou simplesmente **triângulo aritmético** ou **triângulo combinatório**. As ideias sobre o triângulo aritmético foram redescobertas e introduzidas várias vezes e em todos os locais onde se estudou ou estuda matemática. Veja:

- Na Índia, a matemática teve início por volta do ano 3 000 a.C., na região de Harappa e Mohenjodaro. Era uma matemática bem rudimentar e foi somente com a introdução da religião védica, que acompanhou a invasão ariana 1500 a.C., é que passamos a encontrar a resolução de problemas não triviais. A matemática védica era basicamente geométrica, toda voltada para os complicados rituais de construção dos altares para as cerimônias religiosas.
- Só com Pingala 200 a.C. - quase 2. 000 anos antes de Pascal - é que encontramos o triângulo aritmético, apesar de já existirem livros com algumas regras para o cálculo de combinatório e arranjos.
- Os antigos chineses, 1.700 anos antes de Pascal, usavam o triângulo aritmético essencialmente no cálculo aproximado de raízes quadradas e cúbicas.
- Conforme descobriu Tartaglia, cerca de 100 anos antes de Pascal, o triângulo aritmético também é bastante útil no **cálculo de probabilidades.** Com efeito, é fácil vermos que os coeficientes das expansões binomiais têm um significado combinatorial e, então, contabilístico.

Teste seu conhecimento

1. Resolva as equações:

a) $\binom{11}{x}=\binom{11}{8}$ b) $\binom{x}{6}=\binom{x}{4}$ c) $\binom{8}{2}=\binom{8}{x}$

2. Calcule o valor das expressões:

a) $\binom{2}{0}+\binom{7}{7}$ b) $\binom{4}{1}-\binom{8}{0}$ c) $\binom{3}{0}+\binom{4}{1}-\binom{5}{5}$

3. Calcule o valor das expressões aplicando a Relação de Stifel.

a) $\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=\binom{8}{3}$ b) $\binom{x}{4}+\binom{x}{5}=\binom{7}{5}$

4. A soma das soluções da equação $\binom{18}{6}=\binom{18}{4x-1}$ é:

a) 8 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

5. Se $\binom{n}{3}+\binom{n}{4} = 5n(n-2)$, então n é igual a:

a) 11 b)10 c) 9 d) 8 e) 7

6. Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x + 2)^3$ b) $(x + 3)^4$ c) $(x - 3)^6$

d) $(x - 1)^5$ e) $(2x + 8)^5$ f) $(1 - a)^5$

7. Determine o termo em x^3 no desenvolvimento do binômio $(x + 2)^6$.

8. Determine o termo em x^5 no desenvolvimento do binômio $(x - 1)^6$.

9. Determine o termo independente de x no desenvolvimento $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$.

10. Calcule o valor de a para que o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x + a)^7$ seja 1890. O resultado é:

a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt[3]{3}$ d) $2\sqrt{3}$

Gabarito

1. a) $x = 3$ ou $x = 8$ b) $x = 10$ c) $x = 2$ ou $x = 6$

2. a) 2 b) 3 c) 4

3. a) $x = 7$ b) $x = 6$

4. letra b

5. letra a

6.

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

c) $x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1251x^2 + 1458x + 729$

d) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

e) $32x^5 + 160x^4 + 320x^3 + 320x^2 + 160x + 32$

f) $1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5$

7. $T_4 = 160$

8. $T_2 = -6$

9. Não existe.

10. letra a

Noções de Probabilidade

11.1. Introdução

O cálculo de probabilidades é utilizado em muitos ramos do conhecimento. É comum ouvir em telejornais que a probabilidade de um candidato obter a vitória é de x%. Na Biologia, por exemplo, quando estamos interessados em previsões de caráter genético, ou mesmo na política, quando das previsões eleitorais, a probabilidade também desempenha um papel importante. Ela também está presente na economia, engenharia, física, química, jogos estratégicos, sociologia, psicologia, entre outros.

11.2. Elementos do Estudo das Probabilidades

11.2.1.Experimento Aleatório

Consideramos experimentos aleatórios os fenômenos que apresentam resultados imprevisíveis quando repetidos, mesmo que as condições sejam semelhantes.

Exemplo 1: Lançar 2 moedas e observar as faces voltadas para cima.

Exemplo 2: Retirar 1 carta de 1 baralho com 52 cartas e observar o seu naipe

11.2.2.Espaço Amostral

Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer num experimento aleatório. Esse conjunto será indicado pela letra *S*.

Exemplo: Quando se lançam 2 moedas e se observam as faces voltadas para cima, sendo as faces da moeda cara (c) e coroa (k), o espaço amostral do experimento é:

$$S = \{(c,c), (c,k), (k,k), (k,c)\},$$

onde o número de elementos do espaço amostral $n(S)$ é igual a 4.

11.2.3.Evento

Evento (*E*) é qualquer subconjunto de um espaço amostral *S*. Muitas vezes um evento pode ser caracterizado por um fato.

Exemplo: No lançamento de 2 moedas:

E_1: aparecerem faces iguais.
E_2: aparecer cara em pelo menos uma face.

E_1:{(c,c),(k,k)} E_2:{(c,c), (c,k),(k,c)}

Observação: Dizemos que o conjunto vazio (Ø) é evento impossível e o espaço amostral S é evento certo.

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S. Definimos:

- $A \cup B$ - união dos eventos A e B: Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B.
- $A \cap B$ - interseção dos eventos A e B: Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.
- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$.
- A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = S$. O complementar de A é representado por A^c.

Exemplo: No lançamento de um dado, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Dados os eventos: A = {2, 4, 6}, B = {4, 5, 6} e C = {1}, determine o seguinte evento:

a) Sair uma face par e maior que 3.

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

b) Sair uma face par e face 1.

$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$

c) Sair uma face par ou maior que 3.

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$

d) Sair uma face par ou face 1.

$A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$

e) Não sair face par.

$A^c = \{1, 3, 5\}$

11.3. Probabilidade

Considerando um espaço amostral *S*, não-vazio, e um evento *E*, sendo *ECS* (*E* contido em *S*), a probabilidade de ocorrer o evento *E* é o número real de P*(E)*, tal que: $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}$,

Sendo:

- P(E) um número entre zero e um, isto é, $0 \leq P(E) \leq 1$.
- *S* um conjunto equiprovável, ou seja, todos os elementos têm a mesma "chance" de acontecer.
- n(E) o número de elementos do evento *E*.
- n(S) o número de elementos do espaço amostral *S*.

Exemplo 1: Lançando-se um dado, a probabilidade de sair um número ímpar na face voltada para cima é obtida da seguinte forma:

Resolução: Considere os conjuntos $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $E = \{1,3,5\}$. Então,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$P(E)=\frac{3}{6}$$

$$P(E)=\frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

Exemplo 2: Considere o lançamento de dois dados. Calcule a probabilidade de:

a) sair a soma 8;

Observe que neste caso, o espaço amostral U é constituído pelos pares ordenados (i, j), onde i é o número que aparece no dado 1 e j é o número que aparece no dado 2. Note que teremos 36 pares ordenados possíveis do tipo (i, j) onde i = 1, 2, 3, 4, 5, ou 6, o mesmo ocorrendo com j. As somas iguais a 8, ocorrerão nos seguintes casos: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3) e (6,2). Portanto, o evento "soma igual a 8", que denotaremos por E, possui 5 elementos. Logo, a probabilidade procurada será igual a $P(E) = \dfrac{5}{36}$.

b) sair a soma 12;

Neste caso, a única possibilidade é o par (6,6). Portanto, a probabilidade procurada será igual a $P(E) = \dfrac{1}{36}$.

Exemplo 3: Uma urna possui 6 bolas azuis, 10 bolas vermelhas e 4 bolas amarelas. Tirando-se uma bola com reposição, calcule as probabilidades seguintes:

a) sair bola azul;

Note que o amostral, composto pelas bolas azuis, vermelhas e amarelas, possui 20 elementos. Daí, a probabilidade de sair bola azul é dado por:

$$P(E) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}30 = 30\%$$

b) sair bola vermelha;

$$P(V) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$$

c) sair bola amarela.

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$$

Vemos no exemplo acima, que as probabilidades podem ser expressas como porcentagem. Esta forma é conveniente, pois permite a estimativa do número de ocorrências para um número elevado de experimentos. Por exemplo, se o experimento acima for repetido diversas vezes, podemos afirmar que em aproximadamente 30% dos casos, sairá bola azul, 50% dos casos sairá bola vermelha e 20% dos casos sairá bola amarela. Quanto maior a quantidade de experimentos, tanto mais a distribuição do número de ocorrências se aproximará dos percentuais indicados.

11.4. União de dois eventos

Considerando A e B dois eventos contidos em um mesmo espaço amostral S, o número de elementos da reunião de A com B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sendo n(S) o número de elementos do espaço amostral, vamos dividir os dois membros da equação por n(S) a fim de obter a probabilidade $P(A \cup B)$.

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo 1: De uma urna com 20 bolinhas numeradas de 1 a 20, retira-se ao acaso uma bolinha. Qual a probabilidade de essa bolinha ter um número divisível por 2 ou por 3?

Resolução: Consideramos os seguintes conjuntos:
$S = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 \}$

A é conjunto dos números divisíveis por 2:
$A = \{ 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \}$

B é o conjunto dos números divisíveis por 3:
$B = \{ 3,6,9,12,15,18 \}$

Então, $A \cap B$, o conjunto dos números divisíveis por 2 e por 3 é dado por
$A \cap B = \{6,12,18\}$.

Assim,

$$P(A) = \frac{10}{20},\ P(B) = \frac{6}{20}\ \text{e}\ P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

Logo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20}$$

$$P(A \cup B) = \frac{13}{20}\ \text{ou}\ P(A \cup B) = 65\%$$

Exemplo 2: Em determinada comunidade existem dois jornais: J e P. Sabe-se que 5000 pessoas são assinantes do jornal J, 4000 são assinantes de P, 1200 são assinantes de ambos e 800 não lêem jornal. Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso seja assinante de ambos os jornais?

Resolução: Precisamos calcular o número de pessoas do conjunto universo, ou seja, nosso espaço amostral. Temos:

$n(U) = n(J \cup P) +$ número de pessoas que não lêem jornais

Daí,

$n(U) = n(J) + n(P) - n(J \cap P) + 800$
$n(U) = 5000 + 4000 - 1200 + 800$
$n(U) = 8600$

Considere o evento:

E = { Pessoas assinantes de ambos os jornais J e P }

Portanto, a probabilidade procurada será igual a:

$$P(E) = \frac{1200}{860} = \frac{12}{86} = \frac{6}{43}$$

Logo, $P(E) = \frac{6}{43} = 0{,}1395 = 13{,}95\%$.

A interpretação do resultado é a seguinte: escolhendo-se ao acaso uma pessoa da comunidade, a probabilidade de que ela seja assinante de ambos os jornais é de aproximadamente 14%.(contra 86% de probabilidade de não ser).

11.5. Probabilidade Condicional

Considerando os eventos A e B de um espaço amostral S, defini-se como probabilidade condicional do evento A, tendo ocorrido o evento B e indicado por $P(A \mid B)$, a razão:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Da expressão acima tiramos que:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B)\ \text{ou}\ P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$$

Exemplo 1: No lançamento de 2 dados, observando as faces de cima, calcular a probabilidade de sair o número 5 no primeiro dado, sabendo que a soma dos 2 números é maior que 7.

Resolução: O espaço amostral S é dado por:

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Considere os seguintes eventos:

- Evento A: número 5 no primeiro dado.

$$A=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$$

- Evento B: a soma dos dois números é maior que 7.

$$B=\{(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

- A interseção entre A e B é dada por: $A \cap B=\{(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$

Temos então que:

$$P(A \cap B)=\frac{4}{36} \text{ e } P(B)=\frac{15}{36}$$

Logo,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}$$

Exemplo 2: Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas sejam verdes?

Resolução: Considere os seguintes eventos:

B = {sair bola branca};
P = {sair bola preta};
V = {sair bola verde};

Temos que: $P(B) = \frac{2}{9}$, $P(P) = \frac{3}{9}$ e $P(V) = \frac{4}{9}$

Daí,

$$P(V \cap V) = P(V).P(V|V) = \frac{4}{9} . \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

Exemplo 3: Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas).

a) Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

Resolução: Como o baralho tem $13 \times 4 = 52$ cartas e 4 delas são ases, a probabilidade de tirar um A é de $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

b) Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

Resolução: O fato de que a carta sorteada é de copas restringe os casos possíveis às 13 cartas de copas, das quais exatamente uma é A. Logo, a probabilidade de ser sorteado um A, dado que a carta sorteada é de copas, permanece igual a

$\frac{1}{13}$. Mais formalmente, designando por A o evento "sortear A" e, por B, "sortear copas", o evento $A \cap B$ é "sortear o A de copas" e a probabilidade pedida é dada por:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}}=\frac{1}{13}$$

11.6. Eventos Independentes

O último exemplo visto na seção anterior ilustra uma situação importante: aquela na qual a probabilidade condicional de A na certeza de B é igual à probabilidade de A, ou seja, a ocorrência de B não influi na probabilidade de ocorrência de A. Esta condição implica em

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

ou seja, $P(A\cap B) = P(A).P(B)$. Dizemos, então, que dois eventos A e B são independentes se:

$$P(A\cap B)=P(A).\ P(B)$$

Isto significa que,

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A).\ P(B)}{P(B)}=P(A)$$

ou seja, que a ocorrência de *B* não tem qualquer efeito sobre a probabilidade de acontecer *A*.

Exemplo: Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda determine a probabilidade de se obter 3 ou 5 no dado e cara na moeda.

Resolução: O espaço amostral é dado por:

$$S=\{(1,c),(1,k),(2,c),(2,k),(3,c),(3,k),(4,c),(4,k),(5,c),(5,k),(6,c),(6,k)\}$$

Evento A: 3 ou 5 no dado

$$A=\{(3,c),(3,k),(5,c),(5,k)\}$$

$$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Evento B: cara na moeda

$$B=\{(1,k),(2,k),(3,k),(4,k),(5,k),(6,k)\}$$

$$P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Os eventos são independentes, pois o fato de ocorrer A não modifica a probabilidade de ocorrer B. Assim, temos:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

Portanto, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

11.7. Teorema de Bayes

O teorema de Bayes relaciona as probabilidades de *A* e *B* com as respectivas probabilidades condicionadas mútuas. Este teorema afirma que:

$$P(B \mid A) = P(A \mid B) . \frac{P(B)}{P(A)}$$

Exemplo: Em uma cidade onde carros têm que ser avaliados para controle de emissão de poluentes, 25% de todos os carros testados emitem quantidades excessivas de poluentes. No entanto, o teste não é perfeito e pode indicar resultados errados. Desta forma, carros que emitem excesso de poluentes podem não ser detectados pelo teste e carros que não emitem excesso de poluentes podem ser considerados erroneamente fora do padrão de emissão. Quando efetivamente testados, 99% dos carros fora do padrão são detectados e 17% dos carros em bom estado são considerados fora do padrão por erro do teste. Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes?

Resolução: Considere que A é o evento de que um carro seja reprovado no teste, que B_1 seja o evento de que ele emite quantidade excessiva de poluentes e que B_2 seja o evento de que o carro esteja dentro das normas de emissão de poluentes. Então:

$P(B_1) = 0{,}25$
$P(B_2) = 0{,}75$
$P(A \mid B_1) = 0{,}99$
$P(A \mid B_2) = 0{,}17$

e o problema pede para calcularmos $P(B_1 \mid A)$. Existe um P(A) vindo pelo evento B1 e um P(A) vindo pelo evento B_2. Logo

$P(A) = 0{,}2475 + 0{,}1275 = 0{,}3750$

Daí:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1).P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \ . \ 0{,}99}{0{,}3750} = 0{,}66$$

11.8. Um pouco de história

Dar um palpite sobre que face da moeda vai cair para cima ou se vai chover amanhã sempre fez parte de nossas vidas. A origem da probabilidade matemática está ligada aos jogos de cartas e aos jogos de dados, no século 15, quando muitos matemáticos faziam cálculos sobre o número provável de vencedores e a quantidade a ser ganha nos jogos mais disputados.

Uma das opções de cálculo mais usadas pelos estatísticos nas suas previsões hoje, porém, é a que foi desenvolvida no século 18 pelo reverendo inglês Thomas Bayes (1702-1761). Filho e neto de clérigos, Bayes se formou em teologia e nunca exerceu oficialmente a carreira de matemático. Ele cuidava de uma igreja no interior da Inglaterra e havia publicado somente um artigo não assinado, mas era respeitado pela comunidade matemática em seu tempo. Assim, foi admitido na Royal Society de Londres, que congrega cientistas renomados do Reino Unido. Segundo os documentos da entidade, o reverendo possuía amplo conhecimento de geometria e dominava todas as áreas da matemática e filosofia da época.

A idéia de Bayes para o cálculo de probabilidades foi publicada postumamente pela Royal Society com o título "Ensaio Voltado para Solução de um Problema na Doutrina do Acaso" e é uma explicação de como ele abordava os problemas propostos pelos matemáticos anteriores a ele. O trabalho passou a ser conhecido como Teorema de Bayes, uma técnica de estatística e estimativa que virou uma lei fundamental da matemática.

11.9. Como escolher namorada pelos horários de trem do subúrbio

João amava Lúcia que amava João. Só que João além de amar Lúcia também amava Leticia e tentava namorar as duas ao mesmo tempo. Durante a semana, até que dava, mas quando chegava o sábado à noite era terrível. As duas queriam João e este não possuía o dom da presença ao mesmo tempo em dois lugares. Assim alternadamente ou Lúcia ou Leticia ficavam sem sair com João, nos embalos de sábado à noite. HONESTO (?) João decidiu contar a Lúcia a existência de Leticia e a Leticia sobre Lúcia. Claro que houve choros e lamúrias de todos os lados.

E João continuou dividido, sem saber como escolher entre as duas. Aqui um detalhe, João morava próximo a uma estação ferroviária de um subúrbio. Para visitar Lúcia, João pegava trens que iam no sentido da direita cada meia hora, e para visitar Leticia, João pegava trens que iam a esquerda cada meia hora também. Quanto a horários não havia dúvidas. Trens para cada lado de meia em meia hora. Mas voltemos a dúvida existencial afetiva do nosso amigo João. Como escolher entre Lúcia e Leticia? A solução foi dada por Leticia que era professora de Matemática. Leticia propôs a João um critério justo, equânime, salomônico para escolher a quem ir namorar. A proposta foi: João sairia de casa sem saber com quem ir encontrar. Ao chegar na estação pegaria o primeiro trem que passasse, fosse para a direita, fosse para esquerda. Proposta aceita. João começou a usar esse critério aparentemente justo e aleatório. Depois de usar o critério por cerca de três meses, descobriu que visitara Leticia muito mais que Lúcia, e se a sorte quis assim ficou com Leticia e com ela se casou sem nunca haver entendido porque a sorte a privilegiara tanto. Só nas bodas de prata do seu casamento é que Leticia contou a João a razão do mistério, de o trem ter escolhido, ela preferencialmente a concorrente. Leticia estudara os horários dos trens e verificara que os horários eram:

TRENS P/ ESQUERDA	**TRENS P/ DIREITA**
Leticia	**Lúcia**
8h00	8h05
8h30	8h35
9h00	9h35
9h30	9h05

Ou seja: Para cada 25 min. de probabilidade de se pegar o trem que vai para a esquerda havia só 5 min. de probabilidade de se pegar o trem que ia para a direita.

Na guerra como no amor tudo vale..., até usar Matemática.

Teste seus conhecimentos

1. Considerando o experimento que consiste no lançamento de um dado.

a) construir o espaço amostral
b) escrever o evento A: o resultado é ímpar
c) escrever o evento B: o resultado é número primo
d) escrever e interpretar o evento $A \cap B$.
e) escrever e interpretar o evento $A \cup B$.

2. Considerando o experimento que consiste no lançamento de dois dados:

a) construir o espaço amostral
b) escrever o evento A: a soma dos pontos é ímpar
c) escrever o evento B: a soma dos pontos é maior que 6
d) escreve o evento C: os resultados dos dois dados são iguais

3. Um casal planeja ter 3 filhos. Determine os eventos.

a) os 3 filhos de sexo feminino
b) pelo menos 1 é do sexo masculino
c) os 3 do mesmo sexo

4. Qual a probabilidade de ocorrer o número 5 no lançamento de um dado?

5. Qual a probabilidade de se obter um número par no lançamento de um dado?

6. Uma letra é escolhida, ao acaso, da palavra ACASO.

a) Qual a probabilidade de que a letra seja A?
b) Qual a probabilidade de que a letra seja uma vogal?

7. Uma moeda é viciada de tal modo que sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer cara no lançamento desta moeda.
b) ocorrer coroa no lançamento desta moeda.

8. Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. Qual a probabilidade do número escolhido:

a) ser par?
b) ser ímpar?
c) ser primo?
d) quadrado perfeito?

9. Dois dados, um verde e um vermelho são lançados e observados os números das faces de cima.

a) qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?
b) qual a probabilidade de ocorrerem números diferentes?
c) qual a probabilidade da soma dos números ser 7?
d) qual a probabilidade da soma dos números ser 12?
e) qual a probabilidade da soma dos números ser menor ou igual a 12?
f) qual a probabilidade de aparecer número 3 em ao menos um dado?

10. Jogando-se um dado, qual a probabilidade de se obter o número 3 ou um número ímpar?

11. Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de tevê que habitualmente assistem, obteve-se o seguinte resultado: 280 pessoas assistem ao canal A, 250 assistem ao canal B e 70 assistem a outros canais, distintos de A e B. Escolhida uma pessoa ao acaso, determine a probabilidade de que ela assista:

a) ao canal A
b) ao canal B
c) ao canal A ou ao canal B

12. Um inteiro entre 3 e 11 será escolhido ao acaso.

a) qual a probabilidade de que este número seja ímpar?
b) qual a probabilidade de que este número seja ímpar e divisível por 3?

13. Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observarmos 5 caras e 5 coroas?

14. Lançando-se simultaneamente dois dados, qual a probabilidade de se obter o número 1 no primeiro dado e o número 3 no segundo dado?

15. Dois dados são lançados sobre uma mesa. A probabilidade de ambos os dados mostrarem na face superior números ímpares é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

Gabarito

1.
a) $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

b) $A=\{1,3,5\}$

c) $B=\{2,3,5\}$

d) $A\cap B=\{2,3,5\}$. O evento $A\cap B$ é dado pelos números ímpares e primos.

e) $A\cup B=\{1,2,3,5\}$. O evento $A\cup B$ é dado pelos números ímpares ou primos.

2.
a)

$$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

b)

$$A=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2,),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

c)

$$B=\{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

d)

$$C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

3.
a) $E_1=\{(F,F,F)\}$

b)
$E_2=\{(M,M,M),(M,M,F),(M,F,M),(M,F,F),(F,M,M),(F,M,F),(F,F,M,)\}$

c) $E_3=\{(M,M,M),(F,F,F)\}$

4. $\frac{1}{6}$

5. $\frac{1}{2}$

6.
a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$

7.a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

8.a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

9.a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{36}$ e) 1 f) $\frac{11}{36}$

10. $\frac{1}{2}$

11.a) $\frac{14}{25}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{43}{50}$

12.a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{7}$

13. $\dfrac{\frac{10!}{5!5!}}{2^{10}}$

14. $\frac{1}{36}$

15. letra c

Polinômios

12.1. Introdução

Podemos definir polinômio como uma expressão algébrica composta pela adição ou subtração de monômios (monômios são letras, números ou produto entre letra e número). Observe:

- Exemplos de monômios: 10; $-2x$; y^2; $-\frac{8}{m}$;... (todos têm apenas 1 termo).
- Exemplos de polinômios: $x + 2y - 3z + 5$; $\frac{1}{x} - 6 + y - 3z + w$; (têm 4 ou mais termos).

Agora observe a expressão: $4a - 6ab + 2ab - b + 7b - 2a$. Essa expressão é um polinômio composto por seis monômios, mas como existem monômios semelhantes, ou seja, termos que têm mesma parte literal podem representá-lo na forma reduzida que é dada pela junção dos termos semelhantes. Observe:

$$4a - 6ab + 2ab - b + 7b - 2a = 2a - 4ab + 6b$$

Exemplo: Reduza os polinômios dados por:

a) $2x^2 - 3y + 2y^3 + x^2 + 2y = 3x^2 - y + 2y^3$;

b) $x^2y - 2xy + y^3 - x^2y + 2y - xy = y^3 - 3xy + 2y$;

12.2. Função Monomial

Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^n$. A função *f* é chamada *função monomial* ou *monômio* de uma variável *x*. O número *a* é chamado *coeficiente* do monômio e o número natural *n* é chamado *grau* do monômio. Vejamos alguns exemplos:

- $f(x) = 2x^3$ é um monômio de grau 3;
- $g(x) = -\sqrt{3}\,x$ é um monômio de grau 1;
- $h(x) = 2ix^4$ é um monômio de grau 4;
- $p(x) = -10$ é um monômio de grau zero (não tem parte algébrica).

11.3. Função Polinomial

Chamamos de função polinomial, ou polinômio, toda função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Os números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ são os coeficientes do polinômio. Note que o polinômio representa a soma algébrica de monômios na variável x.

Exemplos:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 5$, sendo $a_2 = 2$, $a_1 = -1$ e $a_0 = 5$.

b) $g(x) = -x^3 + 3x - x + 4$, sendo $a_3 = -1$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$ e $a_0 = 4$.

12.4. Grau de um Polinômio

O grau de um polinômio p(x) é representado pelo maior expoente da variável x que possui coeficiente não-nulo, isto é, se $a_n \neq 0$ dizemos que p(x) tem grau *n*.

Notação: O grau de p(x) é indicado por gr(p).

Exemplos:

a) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ é um polinômio de 4º grau.

b) $q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ é um polinômio de 3º grau.

c) $a(x) = 6$ é um polinômio constante. Possui apenas o termo independente e seu grau é zero.

12.4. Valor Numérico de um Polinômio

Para obter o valor numérico de um polinômio p(x) para um número x = k, basta substituirmos a variável x pelo número k e efetuarmos as operações indicadas. Em símbolos, esse valor numérico é indicado por p(k). Se p(k) = 0, diremos que k é uma raiz do polinômio.

Exemplo: Dado o polinômio $p(x) = 4\,x^3 - 2x^2 - x - 1$, temos:

$$p(2) = 4.(2)^3 - 2.(2)^2 - 1 - 1$$
$$p(2) = 4.8 - 2.2 - 1 - 1$$
$$p(2) = 32 - 4 - 1 - 1$$
$$p(2) = 26$$

12.5. Identidade de Polinômio

1) Polinômios Idênticos: Dizemos que dois polinômios são idênticos se, **e somente se**, os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais. Sendo:

$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \\ q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n \end{cases}$$

Temos:

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$$

Exemplo: Dados os polinômios idênticos, $p(x) = mx^2 + 2x - 8$ e $q(x) = 3x^2 + 2x - n$, como $p(x) \equiv q(x)$, obtemos $m = 3$ e $n = 8$.

2) Polinômio identicamente nulo: O polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

será identicamente nulo se, **e somente se**, todos os seus coeficientes forem nulos, ou seja, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Em símbolo: $p(x) \equiv 0$. Para o polinômio nulo não se define grau.

Exemplo: Dado o polinômio e sabendo que p(x) é o polinômio nulo, temos:

$$p(x) \equiv 0 \text{ para } \begin{cases} k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3 \\ p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \end{cases}$$

12.6. Operações com Polinômios

1) Adição e Subtração de Polinômios: Para somarmos ou subtrairmos polinômios, basta somar ou subtrair os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau.

Exemplos:

1. Dados $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 10$ e $q(x) = 4x^2 - 2x^3 + 3x - 6$, temos que:

$$p(x) + q(x) = (2x^3 + 5x^2 - x + 10) + (4x^4 - 2x^3 + 3x - 6)$$
$$p(x) + q(x) = 4x^4 + (2 - 2)x^3 + 5x^2 + (-1 + 3)x + (10 + 6)$$
$$p(x) + q(x) = 4x^4 + 5x^2 + 2x + 16$$

2. Dados $P(x)=5x^2+3x-10$ e $Q(x)=3x^2-5x+2$, temos que:

$$P(x)-Q(x)=(5-3)x^2+(3-(-5))x+(-10-2)$$
$$P(x)-Q(x)=2x^2+8x-12$$

2) Multiplicação de Polinômios: Para multiplicarmos dois polinômios, basta multiplicarmos cada termo de um deles por todos os termos do outro.

Exemplo: Sendo $p(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$ e $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, temos que:

$$p(x).q(x) = (2x^3).(x^3 + 2x^2 - 1) - x^2.(x^3 + 2x^2 - 1) + x.(x^3 + 2x^2 - 1) + 4.(x^3 + 2x^2 - 1)$$
$$p(x).q(x) = 2x^6 + 4x^5 - 2x^3 - x^5 - 2x^4 + x^2 + x^4 + 2x^3 - x + 4x^3 + 8x^2 - 4$$
$$p(x).q(x) = 2x^6 + 3x^5 - x^4 + 4x^3 + 9x^2 - x - 4$$

3) Divisão de Polinômios: Considere dois polinômios a(x) e b(x), sendo b(x) um polinômio não nulo. Ao dividir a(x) por b(x), encontramos os polinômios q(x) e r(x), tais que:

$$\underbrace{a(x)}_{\text{Dividendo}} \equiv \overbrace{q(x)}^{\text{Quociente}}.\underbrace{b(x)}_{\text{Divisor}} + \overbrace{r(x)}^{\text{Resto}}$$

Temos então:

$$\begin{array}{rcl|lcl} \text{Dividendo} & \rightarrow & a(x) & b(x) & \leftarrow & \text{Divisor} \\ \cline{4-4} \text{Resto} & \rightarrow & r(x) & q(x) & \leftarrow & \text{Quociente} \end{array}$$

Observe que:

- O grau do quociente q(x) é igual à diferença dos graus de a(x) e de b(x).
- O grau do resto r(x), para r(x) não-nulo, será sempre menor que o grau do divisor b(x).
- Se a divisão é exata, o resto r(x) é nulo, ou seja, o polinômio a(x) é divisível pelo polinômio b(x).

12.7. Métodos de Divisão de Polinômio

1) Método da Chave: Para dividir o polinômio $a(x) = 4x^3 + x^4 + x^2 + 9$ pelo polinômio $b(x) = x^2 + x - 1$, adotamos um procedimento análogo ao algoritmo usado na aritmética.

1º passo: Escrevemos os polinômios dados na ordem decrescente de seus expoentes, e completamos o polinômio com termos de coeficiente zero.

$$a(x) = 4x^3 + x^4 + x^2 + 0x + 9 \text{ e } b(x) = x^2 + x - 1$$

2º passo: Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor. Obtemos, assim, o primeiro termo do quociente. A seguir, multiplicamos o termo obtido pelo divisor e subtraímos esse produto do dividendo.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4} + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9 & x^2 + x - 1 \\ \underline{-\cancel{x^4} - x^3 + x^2} & x^2 + 3x + 2 \\ \quad \cancel{3x^3} + 5x^2 + 0x + 9 & \\ \quad \underline{-\cancel{3x^3} - 3x^2 + 3x} & \\ \qquad \cancel{2x^2} + 3x + 9 & \\ \qquad \underline{-\cancel{2x^2} - 2x + 2} & \\ \qquad\qquad x + 11 & \end{array}$$

Obtemos: quociente $q(x) = x^2 + 3x + 2$ e resto $r(x) = x + 11$.

2) Teorema do Resto: O resto da divisão de um polinômio p(x) por um binômio (x-a) é o próprio valor numérico do polinômio para x=a, que indicamos por p(a). De acordo com a definição de divisão, temos:

$p(x) = (x-a).\overbrace{q(x)}^{\text{Quociente}} + \overbrace{r(x)}^{\text{Resto}}$, onde R(x) = k(constante), pois gr(x-a)=1.

Daí, $p(x) = (a - a).q(a) + k \Rightarrow p(a) = k$

Logo: $r(x) = p(a)$

Exemplo: O resto da divisão do polinômio $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 1$ pelo polinômio (x-2) é dado pelo valor numérico do polinômio p(x) para x = 2, ou seja, para x igual à raiz do binômio.

Resolução:

$$p(2) = 4(2)^3 - 2(2)^2 + 2 + 1 \Rightarrow p(2) = 27$$

Logo, o resto é r(x) = 27.

3) Dispositivo de Briot-Ruffini: permite-nos encontrar o quociente e o resto da divisão de um polinômio p(x) de grau *n* (n ≥ 1), por um binômio x - a, sendo (n - 1) o grau do quociente.

Exemplo: Efetuar a divisão $\left(3x^3 - 8x^2 + 5x + 6\right) \div \left(x - 2\right)$

Resolução:

1º passo: Determinamos a raiz do binômio x - 2, que é o número 2. Colocamos a raiz do lado esquerdo do dispositivo e, do lado direito, os coeficientes de todos os termos do dividendo, em ordem decrescente de expoente.

Raiz do Polinômio	Coeficientes do dividendo			
2	3	-8	5	6

2º passo: Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo. Em seguida, multiplicamos esse coeficiente pela raiz e somamos o produto ao 2º coeficiente do dividendo, escrevendo o resultado obtido abaixo dele.

3º passo: Multiplicamos o resultado obtido pela raiz e adicionamos o produto ao 3º coeficiente. Repetimos o processo até o último coeficiente.

Raiz do Divisor	Coeficientes de p(x)			
2	3	-8	5	6
	↓	3.2 - 8	2.(-2) + 5	1.2 + 6
	3	-2	1	8
	Coeficientes do Quociente			Resto

Concluindo: os três primeiros números obtidos são os coeficientes do quociente. O último número obtido é o resto da divisão. Podemos, então, concluir que o quociente é dado por $q(x) = 3x^2 - 2x + 1$ e o resto por $r(x) = 8$.

Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 8$ por $x + 1$.

Resolução: Inicialmente, temos que completar o polinômio com o termo faltante, usando 0x, e colocar os termos na forma ordenada. Então:

$$p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 0x + 8$$

Assim, usando o dispositivo de Brioti-Ruffini, obtemos os coeficientes do quociente e do resto:

$$\begin{array}{c|cccc}
\overbrace{-1}^{\text{Raiz do Binômio}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{4 \quad -3 \quad 0 \quad 8}^{\text{Coeficientes do Dividendo}}} \\
\hline
 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{4 \quad -7 \quad 7}_{\text{Coeficientes do Quociente}}} & \underbrace{1}_{\text{Resto}}
\end{array}$$

Obtemos então: $q(x) = 4x^2 - 7x + 7$ e $r(x) = 1$.

4) Divisões Sucessivas: Podem ocorrer ainda duas situações importantes na divisão de polinômios:

1ª) Quando p(x) é divisível por (x - a) e o quociente dessa divisão é divisível por (x - b), tem-se, então, que p(x) é divisível por (x - a).(x - b).

Exemplo: $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é divisível por $(x - 2).(x + 1)$.

Resolução: Primeiro, dividimos p(x) por x - 2:

2	1	2	-5	-6
	1	4	3	0

Em seguida, dividimos o quociente obtido por x + 1:

-1	1	4	3
	1	3	0

Como o resto desta última divisão também é igual a zero, pode-se concluir que p(x) é divisível por (x - 2).(x + 1), ou seja, por $x^2 - x - 2$.

12.8. Curiosidade: fato surpreendente

"Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos, o resultado sempre será um quadrado perfeito."

Alguns exemplos levarão os alunos a suspeitar que essa afirmação é sempre verdadeira. Poderemos anotar nossas observações no quadro-negro assim:

- $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$,
- $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$,
- $97 \times 98 \times 99 \times 100 + 1 = 94109401 = 9701^2$.

Para obter uma prova desse fato, vamos representar os inteiros consecutivos por: n, $n+1$, $n+2$ e $n + 3$. Então:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \qquad (1)$$

Temos, agora, dois procedimentos possíveis. Alguns alunos notarão que o quadrado perfeito, nos nossos exemplos numéricos, é o quadrado de 1 mais o produto do primeiro pelo último termo da sequência (é também o quadrado de

1 menos o produto do segundo pelo terceiro termo da sequência). Poderemos observar, por exemplo, que:

$$4 \text{ x } 5 \text{ x } 6 \text{ x } 7 + 1 = 841 = 29^2 = (1 + 4 \text{ x } 7)^2.$$

Expressando em polinômios, escrevemos:

$$[1+ n(n + 3)]^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n +1 \qquad (2)$$

Isso, além de confirmar que (1) é um quadrado perfeito, também nos diz que o número é o quadrado perfeito.

Outra maneira de proceder é trabalhar diretamente a partir de (1) e conjecturar que seria bom fatorar o segundo membro e ver que ele é um quadrado perfeito. Esse quadrado teria, para um a conveniente, a forma:

$$(n^2 + an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)\, n^2 + 2an + 1. \qquad (3)$$

Igualando os coeficientes em (1) e (3), temos:

$$2a = 6 \text{ e } 2 + a^2 = 11, \text{ ou seja, } a = 3.$$

Então,

$$n4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Teste seu conhecimento

1. Dê o grau dos seguintes polinômios:

a) $p(x) = 5x^2 + x - 7$

b) $p(x) = - 6x^4 + x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1$

c) $p(x) = 3x - 2$

d) $p(x) = 15$

2. Determinar o valor de *n*, de tal forma que $p(x) = (n^2 - 4)x^3 + x^2 + 2x - 3$ tenha grau 2.

3. Determinar o valor de *k*, de tal forma que $p(x) = 7x^4 + 2x^3 + (k-3)x^5 + 5$ tenha grau 4.

4. Dado o polinômio $p(x) = - 4x^3 + 2x^2 + x - 1$, calcule:

a) $p(1)$

b) $p(-2)$

c) $p(0)$

d) $p\left(\frac{1}{2}\right)$

5. Sendo o polinômio $p(x) = 5x^2 + 3x - n$, determine o valor de *n*, sabendo que 1 raiz de p(x).

6. Dado o polinômio $p(x) = - mx^2 + n$, determine o valor de *m* e *n*, sabendo que $p(- 1) = 6$ e $p(-2) = 2$.

7. Seja o polinômio $p(x) = ax^2 + 2x - b$, determine o valor de *a* e de *b*, sabendo que $p(2) = 6$ e $p(3) = 13$.

8. Sendo $p(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$ e $q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$, calcular:

a) $p(x) + q(x)$

b) $p(x) - q(x)$

9. Dados os polinômios:

$$a(x) = 6x^3 + mx^2 - \frac{2}{5},\ b(x) = -2x^2 + 7x + n \text{ e } c(x) = px^3 - 7x - 1,$$

Calcule *m*, *n* e *p* para que c(x) seja a diferença entre a(x) e b(x), nessa ordem.

10. Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 - x + 5$, $q(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Calcule:

a) $[p(x)]^2$

b) $p(x).q(x)$

11. Obtenha o quociente q(x) e o resto r(x), na divisão do polinômio a(x) por b(x), em cada caso:

a) $a(x) = x^2 + 5x + 2$ por $b(x) = x - 1$;

b) $a(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$ por $b(x) = x + 2$;

c) $a(x) = x^2 - 3x - 4$ por $b(x) = x + 1$;

12. Na divisão do polinômio d(x) pelo polinômio $p(x) = x^2 + 1$, encontramos o quociente $q(x) = x^2 - 6$ e o resto $r(x) = x + 6$. Determinar d(x).

13. Obter o valor de k de modo que $a(x) = x^2 - 3x + k$ seja divisível por $b(x) = x - 1$.

14. Determine o valor de k, sabendo que o polinômio $d(x) = 2x^3 + 8x^2 + 4x - k$ é divisível por $b(x) = 2x + 2$.

15. Calcule m de modo que a divisão do polinômio $p(x) = 3x^2 + mx - 2$ pelo binômio $x-3$ tenha resto igual a 5.

16. Determine m e n, sabendo que os restos das divisões do polinômio $p(x) = -x^3 + 3x^2 + mx - n$ pelos binômios $x + 1$ e $x + 2$ são, respectivamente, 1 e -5.

17. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, determine o quociente e o resto na divisão de:

a) $a(x) = x^2 - 7x + 12$ por $b(x) = x - 5$

b) $a(x) = -6x^3 + 2x^2 - x - 4$ por $b(x) = 2x + 1$

c) $a(x) = 4x^3 - 3x + 4$ por $b(x) = x - 3$

18. O polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + 2x + 5$. Quais são os valores de *p* e *q*?

19. Dividindo-se um polinômio p(x) por $(x - 1)^2$, obtém-se um resto que, dividido por $x - 1$, dá resto 3. Ache p(1).

20. Se o polinômio $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + ax + b$ é divisível por $x^2 + x + 1$. Qual é o valor a + b?

Gabarito

1.

a) Grau = 2

b) Grau = 5

c) Grau = 1

d) Grau = 0

2. n = 2 ou n = -2

3. k=3

4.

a) -2

b) 37

c) -1

d) -1/2

5. n = 8

6. $m = \frac{4}{3}$ e $n = \frac{22}{3}$

7. a = 1 e b = 2

8.

a) $p(x) + q(x) = 2x^4 + 3x^2 + 6$

b) $q(x) - p(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

9. $m = -2$, $n = \frac{3}{5}$ e $p = 6$

10.

a) $[p(x)]^2 = 4x^6 - 4x^4 + 20x^3 + x^2 - 10x + 25$

b) $p(x).q(x) = 6x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 13x^2 + 11x - 5$

11.

a) $q(x) = x + 6$ e $r(x) = 9$

b) $q(x) = 2x^2 - 5x + 11$ e $r(x) = -19$

c) $q(x) = x$ e $r(x) = 0$

12. $d(x) = x^4 - 5x^2 + x$

13. k = 2

14. k = 2

15. $m = -\frac{20}{3}$

16. m= -2 e n = 5

17.

a) $q(x) = x - 2$ e $r(x) = 2$

b) $q(x) = -3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}$ e $r(x) = -\frac{9}{4}$

c) $q(x) = x^3 + 5x^2 + 15x + 46$ e $r(x) = 132$

18. p = 1 q = -10

19. p(1) = 3

20. a + b = -17

Equações Polinomiais ou Algébricas

13.1. Definição

Chama-se equação algébrica ou polinomial toda equação redutível à forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, sendo $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ e x números complexos, sendo n o grau da equação.

13.2. Raiz ou Zero de uma Equação Polinomial ou Algébrica

Raiz ou zero de uma equação polinomial ou algébrica é o valor de x que a verifica.

Exemplo: Na equação $x^2 - 3x - 10 = 0$, -2 é raiz, pois

$$(-2)^2 - 3.(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$$

Porém 7 não é raiz, pois $7^2 - 3.7 - 10 = 8 \neq 0$.

Resolver uma equação polinomial ou algébrica é determinar todas as suas raízes.

13.3. Equações do primeiro, segundo e terceiro Graus

1) Equação do 1º Grau: Chamamos de equação do 1º grau toda equação do tipo:

$$ax + b = 0, \text{ com } a,b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Exemplos:

1) $x + 2 = 0$;

2) $-\frac{x}{3} = 4$;

3) $-3x + 9 = 0$;

4) $x + 10 = -3x$

Pergunta: Como resolver uma equação do 1º grau?

Resolver uma equação do 1º grau é o mesmo que determinar sua raiz. Para isto, basta isolar a incógnita no primeiro membro, colocando o que não tem incógnita no segundo, com a operação contrária.

Exemplo: Determine a raiz das equações do 1º grau:

a) $x + 3 = 0$

Resolução: A operação contrária à soma é a subtração. Então:

$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

b) $-x - 4 = 10$

Resolução: A operação contrária à subtração é a soma. Então:

$$-x - 4 = 10$$
$$-x = 10 + 4 .(-1)$$
$$x = -10 - 4$$
$$x = -14$$

c) $2x + 10 = 0$

Resolução: A operação contrária da soma é a subtração e da multiplicação é a divisão. Então:

$$2x + 10 = 0$$
$$2x = -10$$
$$x = -\frac{10}{2}$$
$$x = -5$$

d) $-\frac{x}{3} = 5$

Resolução: A operação contrária à divisão é a multiplicação. Então:

$$-\frac{x}{3} = 5$$
$$-x = 3.5$$
$$-x = 15\ .(-1)$$
$$x = -15$$

2) Equação do segundo grau: Chamamos de equação do 2º grau toda equação do tipo:

$$ax^2 + bx + c, \text{ com } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Exemplos:

1) $x^2 + 5x - 4 = 0;$

2) $-2x^2 + x = 7;$

3) $x^2 - 3x = 0;$

4) $x^2 - 8 = 10;$

Pergunta: Como resolver uma equação do 2º grau?

É o mesmo que determinar suas raízes. As equações do 2º grau podem ser completas ou incompletas, que é quando faltam os termos b ou c. Temos duas situações:

1) Faltando o termo c, ou seja, equação do tipo:

$$ax^2 + bx = 0\ , \text{ com } a,b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Para determinar as raízes de equações desse tipo, basta colocar a incógnita em evidência. Dessa forma obteremos o produto de dois termos igualado a zero. Para que um produto seja zero, um dos termos do produto deve ser zero.

Exemplo: Determine as raízes da equação do 2º grau dada por:

$$x^2 + 4x = 0$$
$$x.(x + 4) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = -4$$

2) Faltando o termo b, ou seja, equação do tipo:

$$ax^2 + c = 0, \text{ com } a, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Para determinar as raízes de equações desse tipo, basta isolar a incógnita e depois efetuar a raiz quadrada.

Exemplo: Determine as raízes da equação incompleta do 2º grau dada por:

$$x^2 - 16 = 0$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm\sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

Porém, para determinar a raiz de uma equação completa do 2º grau, temos que usar a fórmula de Báskara. A fórmula de Báskara é dada por:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac \text{ e } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemplo: Determine as raízes da equação completa do 2º grau dada por:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.4$$
$$\Delta = 16 - 16$$
$$\Delta = 0$$

Então,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2.1}$$
$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{4 + 0}{2} = 2 \text{ ou } x_2 = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

3) Equação do terceiro grau: Chamamos de equação do 3º grau toda equação do tipo:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Exemplos:

1) $x^3 + 2x^2 + x + 5 = 0$;

2) $2x^3 + 2x + 4 = 0$;

3) $x^3 - 5x^2 = -4$;

4) $x^3 + 2 = 0$

Para determinar as raízes de uma equação do 3º grau, usaremos as relações do Girard que veremos adiante.

13.4. Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que toda equação polinomial ou algébrica $p(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

Com o auxílio do teorema fundamental da Álgebra, mostraremos que um polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em um produto de fatores do 1º grau. Vejamos:

Seja a equação polinomial de grau $n \geq 1$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra existe um número x_1, tal que $p(x_1) = 0$. Assim,

$$p(x) = (x - x_1).q_1(x) = 0 \qquad (1)$$

Concluímos, então, que $x - x_1 = 0$ ou $q_1(x) = 0$. Sendo $n > 1$, $q_1(x)$ não é um polinômio constante, logo, admite uma raiz x_2, tal que:

$$q_1(x) = (x - x_2).q_2(x) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$p(x) = (x - x_1).(x - x_2).q_2(x) = 0$$

Procedendo do mesmo modo, podemos escrever:

$$p(x) = (x - x_1).(x - x_2).(x - x_3). \dots .(x - x_n).q_n(x)$$

Sendo q_n uma constante e a_n o coeficiente de x^n, pela identidade de polinômios temos $q_n = x^n$. Daí:

$$p(x) = a_n (x - x_1).(x - x_2).(x - x_3). \dots .(x - x_n)$$

Quando um polinômio é escrito da maneira acima, dizemos que ele está na forma fatorada.

Exemplo: Considere o polinômio $p(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 8$, cujas raízes são $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

Resolução: Colocando p(x) na forma fatorada, temos:

$$p(x) = 2(x - (-1)).(x - 1).(x - 4)$$
$$p(x) = 2.(x + 1).(x - 1).(x - 4)$$

13.5. Relação de Girard

A relação de Girard é uma relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação.

1º Caso: Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$. Decompondo em fatores do 1º grau:

$$ax^2 + bx + c = a\ (x - x_1).(x - x_2)$$
$$ax^2 + bx + c = a\ [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2]$$

Dividindo os membros por "a", obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2$$

Pela identidade de polinômios tiramos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes da equação do 2º grau.

2º Caso: Seja a equação de 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. De modo análogo ao caso anterior, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$$

Observação: Podemos deduzir também relações de Girard para equações com grau maior do que 3.

Exemplo: Vamos escrever as relações de Girard para as seguintes equações:

a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

Resolução: Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação acima. As Relações de Girard são dadas por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

b) $2x^3 - 4x^2 + 3x + 5 = 0$

Resolução: Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação acima. As Relações de Girard são dadas por:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{5}{2}$$

As relações de Girard não servem somente para determinarmos a soma e o produto de raízes. Elas são utilizadas para compor equações do 2º grau. As equações são representadas por: $x^2 - Sx + Px = 0$, onde S é a soma e P é o produto das raízes da equação.

Exemplo: Determine a equação do 2º grau que possui como raízes os números 2 e -5.

Resolução: S e P são dados por:

Soma: $S = x_1 + x_2 = 2 + (-5) = 2 - 5 = -3$

Produto: $P = x_1.x_2 = 2.(-5) = -10$

Assim, a equação procurada é dada por:

$$x^2 - (-3)x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

13.6. Multiplicidade de uma raiz

Um polinômio p(x), na forma fatorada, pode apresentar fatores repetidos. Exemplos:

a)Seja $p(x) = x^2 - 4x + 4$

Resolução: Na forma fatorada, $p(x) = (x-2).(x-2)$, observamos dois fatores iguais a $(x-2)$. Dizemos, então, que 2 é raiz dupla, isto é, de multiplicidade 2.

b) Seja $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

Resolução: Na forma fatorada, $p(x) = (x-3).(x-3).(x+1)$, observamos dois fatores iguais a $(x-3)$ e um fator igual a $(x+1)$. Dizemos que 3 é uma raiz de multiplicidade 2 e 1 é uma raiz simples, ou de multiplicidade 1.

13.7. Raízes Complexas

Sendo $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0)$ raiz da equação $p(x) = 0$ de coeficientes reais, temos que também é raiz dessa equação. Em outras palavras, se um número complexo é raiz de uma equação, então, seu conjugado também o é.

Exemplo: Encontre as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$.
Resolução:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow x_1 = 2 + i \text{ e } x_2 = 2 - i$$

Note que as raízes são dois números complexos conjugados.

13.8. Raízes Racionais

Considere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Se o número racional $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, p e q primos entre si, é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exemplo: Resolva a equação cúbica: $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.
Resolução: Primeiro vamos pesquisar as possíveis raízes racionais da forma para $\frac{p}{q}$, então, recairmos numa equação do 2º grau.

- p são os possíveis divisores de $a_0 = 2$: $p \in \{-2,-1,1,2\}$;
- q são os possíveis divisores de $a_n = 1$: $q \in \{-1,1\}$;

Portanto, $\frac{p}{q} \in \{-2,-1,1,2\}$. Testando as possibilidades, obtemos:

$$p(-2) \neq 0,\ p(2) \neq 0,\ p(-1) \neq 0 \text{ e } p(1) = 0,$$

ou seja, 1 é raiz racional da equação dada.

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	-1	-2	2
	1	0	-2	0

Para obtermos as outras raízes, basta resolvermos a equação:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Então o conjunto solução da equação é dado por $S = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right\}$.

13.9. Um pouco de História

Albert Girard nasceu em 1595, em St Mihiel (França), e morreu no dia 8 de dezembro de 1632, em Leiden (Holanda). Era francês, mas emigrou como refugiado religioso para a Holanda. Frequentou pela primeira vez a Universidade de Leiden, aos 22 anos, onde estudou Matemática. Porém, seu primeiro interesse foi a música.

Trabalhou com álgebra, trigonometria e aritmética. Em 1626, publicou um tratado sobre trigonometria, contendo as primeiras abreviaturas *sen*, *cos*, *tag*. Também forneceu fórmulas para o cálculo da área do triângulo. Desenvolveu ainda esboços do teorema fundamental da álgebra e traduziu os trabalhos de Stevin em 1625.

Em 1629, escreveu *Invention nouvelle en l'algèbre*, demonstrando que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias.

Como professor, ensinou Matemática, Engenharia, Óptica e Música. Patrocinado pela corte, também pesquisou a lei da refração e dedicou muito do seu tempo à Engenharia no exército holandês, especialmente no projeto de fortificações e na cartografia.

Teste seu Conhecimento

1. Coloque na forma fatorada o polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 15$, sabendo que uma raiz é 5.

2. Uma raiz de $p(x) = 3x^3 + 9x^2 - 18x - 24$ é 2. Coloque esse polinômio na forma fatorada.

3. Sendo *a, b* e *c* as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 6x - 8 = 0$, determine:

a) $a + b + c$

b) $ab + ac + bc$

c) $a.b.c$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

4. Determine o valor de k, para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3kx + 5x = 0$ é o dobro da outra.

5. Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $2x^3 + 2x^2 - x + a = 0$.

6. Sabendo que -1 é raiz dupla de $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$, determine o conjunto verdade da equação.

7. Determine m de modo que a equação $x^3 + mx - 2 = 0$ tenha raiz dupla.

8. Calcule os valores de m e n, de modo que a equação $x^2 - mx + n = 0$ tenha uma raiz igual a (3 - 4i).

9. As raízes de um polinômio de 4º grau são $3, 2, -1, \frac{1}{2}$ e o coeficiente do termo x^4 é 2. Qual é esse polinômio?

10. Se a equação $x^3 + 2x^2 - x + a = 0$ admite duas raízes opostas, então, qual é o produto de todas as suas raízes?

11. Resolva a equação $x^3 - 7x + 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é 2.

12. Determine p na equação $x^4 + px^3 + px^2 + px + p = 0$, sabendo que 1 é raiz.

13. Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = 0$.

14. Determine o conjunto verdade da equação $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$.

15. Calcule os valores de p e q de modo que a equação $x^3 + px^2 + q = 0$ tenha uma raiz igual à (1+i).

Gabarito

1. $p(x) = (x + 1).(x - 5).(x - 3)$

2. $p(x) = 3.(x - 2).(x + 1).(x + 4)$

3.
a) 2

b) 3

c) 4

d) $\frac{3}{4}$

4. $k = \frac{5}{2}$

5. $-\frac{2}{3}$

6. $V = \{-1,5\}$

7. $m = - 3$

8. $m = 6$ e $n = 25$

9. $p(x) = 2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6$

10. 2

11. $S = \{-3,1,2\}$

12. $p = -\frac{1}{4}$

13. $-\frac{2}{3}$

14. $V = \{-1,3\}$

15. $p = - 1$ e $q = 2$

Inequações Polinomiais

14.1. Definição

Chama-se inequação toda sentença matemática que é aberta por uma desigualdade.

Exemplos:

1) $x - 2 > 0$;

2) $\frac{x}{3} + 5 \leq 0$;

3) $-2x < x + 1$;

4) $x + \frac{x}{2} < 0$;

A resolução das inequações consiste em determinar os valores de x que as satisfazem e pode ser feita pelo estudo de sinal de uma função.

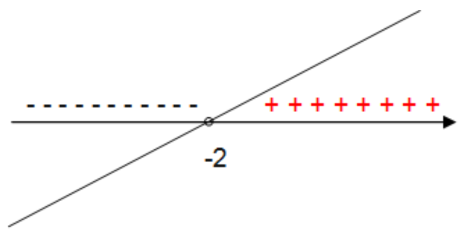
Exemplo:

a) $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Resolução: Seja a função dada por $f(x) = x + 2$; queremos $f(x) > 0$. Determinando o zero da função:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Estudando os sinais da função:



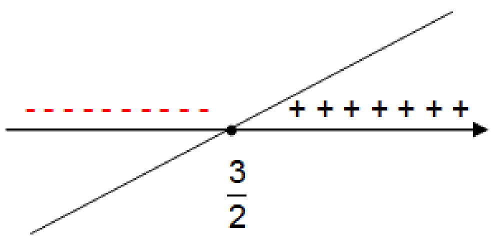
Os valores de x para os quais $f(x) > 0$ são aqueles que satisfazem a inequação. Assim, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

b) $2x - 3 \leq 0$

Resolução: Seja a função dada por $f(x) = 2x - 3$; queremos $f(x) \leq 0$.
Determinando o zero da função:

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Estudando os sinais da função:



Os valores de x que tornam $f(x) \leq 0$ são aqueles que satisfazem a inequação.

Assim, temos $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{3}{2} \right\}$

c) $x^2 - 6x + 8 < 0$

Resolução: Seja a função dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
Determinando do o zero da função:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$a = 1,\ b = -6 \text{ e } c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

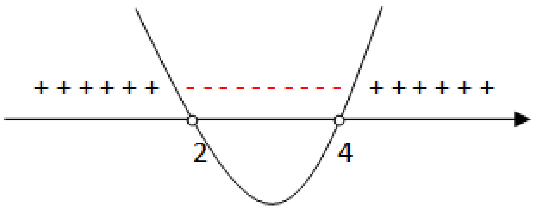
$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 \qquad x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1}$$

$$\Delta = 36 - 32 \qquad x = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$\Delta = 4 \qquad x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Queremos os valores de x para que a função seja menor que zero. Estudando os sinais da função:



Os valores de x que tornam $f(x) < 0$ são aqueles que satisfazem a inequação.

Assim, temos: $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \}$

d) $(-x + 4).(x - 3) \leq 0$

Resolução: Seja a função dada por $f(x) = (-x + 4).(x - 3)$

Determinando do o zero da função: $-x^2 + 7x - 12 = 0$

$$a = -1,\ b = 7 \text{ e } c = -12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

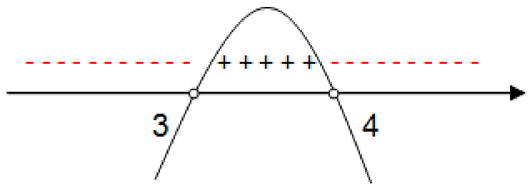
$$\Delta = (-7)^2 - 4.(-1).(-12) \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2.(-1)}$$

$$\Delta = 49 - 48 \qquad x = \frac{-7 \pm 1}{-2}$$

$$\Delta = 1 \qquad x_1 = \frac{-7+1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-7-1}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Queremos os valores de x para que $f(x) \leq 0$.
Estudando os sinais da função:



Os valores de x que tornam $f(x) \leq 0$ são aqueles que satisfazem a inequação.

Assim, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x \geq 4\}$.

14.2. Sistema de Inequações Polinomiais

Para resolvermos um sistema de inequações polinomiais, basta fazermos o estudo do sinal de cada inequação, separadamente, seguido da determinação da intersecção dos conjuntos solução dessas inequações.

Exemplo: Determine a solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x - 9 \geq 0 & \text{(I)} \\ -4x - 8 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

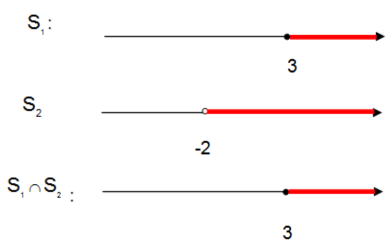
Resolução: Seja as funções $f(x) = 3x - 9$ e $g(x) = -4x - 8$, queremos $f(x) \geq 0$ e $g(x) < 0$.

Determinando o zero das funções:

Zero da função (I): $x = 3$

Zero da função (II): $x = -2$

Identificando os valores de x que satisfazem cada inequação como $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ e $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$ e fazendo a interseção dos conjuntos solução, obtemos:



Assim, o conjunto solução é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

14.3. Inequação-produto

Considerando $f(x)$ e $g(x)$ funções de variável x, chamamos de inequação-produto as desigualdades do tipo:

$$f(x).g(x) > 0;\ f(x).g(x) \leq 0;\ f(x).g(x) < 0;\ f(x).g(x) \geq 0$$

Para resolvermos uma inequação-produto, basta fazermos o estudo do sinal das funções, separadamente, seguido da determinação dos sinais do produto de f(x) e g(x) e, posteriormente, identificando os valores de x que satisfazem a inequação-produto.

Exemplo. Determine a solução de $\left(x^2 - 7x + 10\right).\left(6x + 12\right) \geq 0$

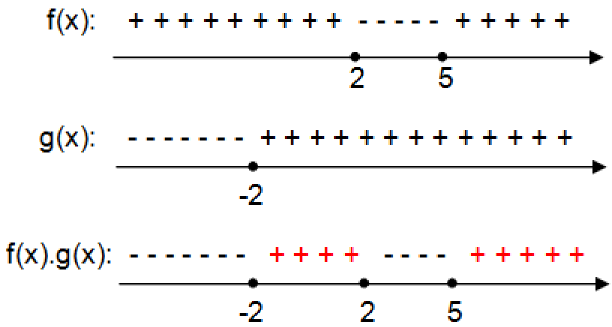
Resolução: Sejam $f(x) = x^2 - 7x + 10$ e $g(x) = 6x + 12$

Determinando os zeros das funções:

Zero da f(x): $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$

Zero da g(x): $x = -2$

Queremos que $f(x).g(x) \geq 0$, estudando os sinais das funções e do produto das funções, obtemos:



Portanto, os valores de x que satisfazem a inequação são:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\right\}$$

14.4. Inequação-quociente

Considerando f(x) e g(x) funções de variável x, chamamos de inequações quociente as desigualdades como:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \; ; \; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \; ; \; \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \;\text{ ou }\; \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

Importante lembrar na resolução de uma inequação-produto que o denominador deve ser diferente de zero e a regra de sinais é a mesma, tanto para multiplicação como para divisão, no conjunto dos reais.

Exemplo: Determine a solução de $\dfrac{-x^2 + 4x - 3}{-x + 2} \geq 0$

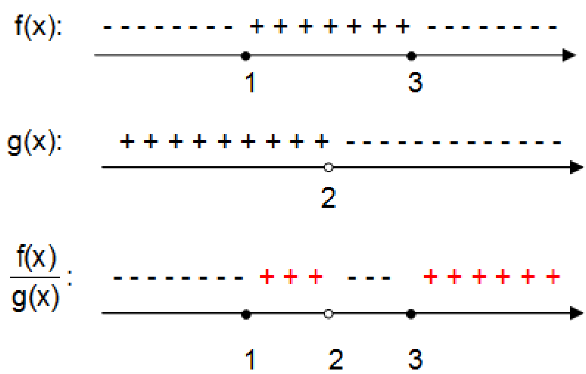
Resolução: Sejam $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $g(x) = -x + 2$

Determinando os zeros de f(x) e g(x):

Zero de f(x): $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

Zero de g(x): $x = 2$

Queremos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, estudando o sinal das funções e quociente das funções, obtemos:



Portanto os valores de x que satisfazem a inequação são:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \text{ ou } x \geq 3\}$$

Teste o seu conhecimento

1. Determine o conjunto verdade das seguintes inequações:

a) $x + 5 \geq 0$

b) $4x - 3 < 0$

c) $x - 6 > 0$

d) $-3x - 6 \leq 0$

e) $x^2 - 5x + 6 > 0$

f) $-x^2 + 8x - 15 < 0$

g) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$

h) $(x + 4).(x - 4) \leq 0$

2. Resolva as inequações, a seguir, no campo dos reais.

a) $2(x - 2) + 3 < 5(x + 1)$

b) $3(x - 4) + 1 \geq 2x - 12$

c) $(x - 4)(x - 3) < 0$

d) $x(x - 7) > 0$

3. Resolva os sistemas de inequações.

a) $\begin{cases} -2x - 2 < 0 \\ 2x + 1 < 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x - 9 < 0 \\ 3x \leq 4x - 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 1 > 5x + 2 \\ 4x + 3 < 7x - 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 3x.2 > 0 \\ -x^2 + x > 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x^2 - 4x + 12 \leq 0 \\ 5x + 15 \leq 0 \end{cases}$

4. Resolva as inequações-quocientes.

a) $\dfrac{x - 1}{x} > 0$

b) $\dfrac{3x + 2}{x + 3} \leq 0$

c) $\dfrac{(-x - 2)(x + 1)}{-1 + x} < 0$

d) $\dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x - 4} > 0$

e) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$

5. Resolva a inequação dada por $\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\geq 0$.

6. Encontre o domínio de $\sqrt{\frac{(3x-6)(-x+3)}{(-4x+8)}}$.

7. Resolver a inequação dada por $x+4<-\frac{2}{x+1}$.

8. Determine a solução do sistema $\begin{cases} 2x^2+12>x^2-8x \\ x+5<0 \end{cases}$.

Gabarito

1.
a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{4}\right\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ ou } x < 3\}$

g) $V = \mathbb{R}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$

2.
a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x < 4\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 7\}$

3.
a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

c) $V = \varnothing$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

e) $V = \varnothing$

4.
a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -\frac{2}{3}\right\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2,x,-1 \text{ ou } x > 1\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 1 \leq x < 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

5. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}$

6. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

7. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x < -1\}$

8. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6\}$

BIBLIOGRAFIA

[1] BARRETO FILHO, B.; BARRETO, C. X.; **Matemática aula por aula**- Volume único: Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2000.

[2] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N.; **Matemática Ciência e Aplicações**, Volumes 1, 2 e 3 , 2ª Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[3] IEZZI, G.; **Fundamentos de Matemática Elementar**- Volumes 3, 4, 5 e 6. São Paulo: Atual Editora, 1985.

[4] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; **A Matemática do Ensino Médio**, Volumes 1, 2 e 3. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[5] MACHADO, A. S.; **Matemática, temas e metas**. São Paulo: Atual Editora, 1986.

[6] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C.; **Progressões e Matemática Financeira**. 5ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 1993

[7] NETTO, S. P.; GÓES, C. C.; **Matemática na Escola Renovada**. São Paulo: Editora Saraiva S.A.

[8] CARMO, M.; MORGADO, A.; WAGNER, E.; **Trigonometria e Números Complexos.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[9] **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**. Publicação quadrimestral da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. (mais de 60 números publicados).