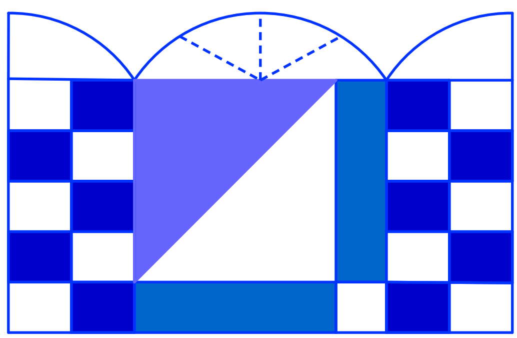
Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática
Licenciatura em Matemática

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA



Mercio Botelho Faria
Bráulia A. Almeida Perázio

02 de fevereiro de 2012
Viçosa - MG

Universidade Federal de Viçosa

Reitora
Nilda de Fátima Ferreira Soares

Vice-Reitor
Demétrius David da Silva

Diretor
Frederico Vieira Passos

Prédio CEE, Avenida PH Rolfs s/n
Campus Universitário, 36570-000, Viçosa/MG
Telefone: (31) 3899 2858 / Fax: (31) 3899 3352

FARIA, Mercio B. e PERÁZIO, Bráulia A. A. - Fundamentos de Geometria. Viçosa, 2011.

Layout: Mercio Botelho Faria
Edição e imagens de capa: Braulia A. A. Perázio

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

F224f 2012	Faria, Mercio Botelho, 1975- Fundamentos de geometria [recurso eletrônico] / Mercio Botelho Faria e Bráulia A. Almeida Perázio – Viçosa, MG : UFV/CEAD, 2012. 67p. : il. (algumas col.) ; 29cm. (Conhecimento, ISSN 2179-1732 ; n.4) Livro eletrônico. Bibliografia: p. 67. 1. Geometria. I. Perázio, Bráulia A. Almeida, 1983-. II. Freitas, III. Universidade Federal de Viçosa. Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância. IV. Título. CDD 22. ed. 516

Sumário

Introdução 1

1 Desenvolvimento Teórico e histórico da Geometria 3

1.1 História da Geometria . . . 5

1.2 Elementos de Euclides . . . 7

2 Axiomas de Incidência e Ordem 9

3 Axiomas de Medição 13

3.1 Axiomas de Medição: Segmentos . . . 13

3.2 Axiomas de Medição: Ângulos . . . 16

4 Axiomas de Congruências 23

5 Teorema do Ângulo Externo e Consequências 29

6 Quinto Postulado de Euclides 37

7 Semelhança de Triângulos 43

8 Polígonos 47

9 Círculos 51

10 Áreas 59

10.1 Área de Regiões Poligonais . . . 60

10.2 Comprimento e área de Círculos e Arcos de Círculo . . . 62

11 Prática de Ensino 65

Referências Bibliográficas 67

Introdução

Este texto foi produzido para ser utilizado na disciplina MAT2 53 - Fundamentos de Geometria do curso de Licenciatura em Matemática, modalidade à distância, da Universidade Federal de Viçosa. Nesta disciplina, faremos um estudo introdutório sobre geometria euclidiana plana. O desenvolvimento destas aulas apoiou-se nos seguintes textos [1], [2], [3], [4], [6] e [5].

O conteúdo deste texto é distribuído em doze capítulos da seguinte forma:

1. no capítulo 1 descrevemos um pouco da história da geometria plana.
2. No capítulo 2 trabalhamos os axiomas de incidência e ordem.
3. Os axiomas de medição, segmentos e ângulos, são desenvolvidos no capítulo 3, seções 3.1 e 3.2, respectivamente.
4. Os capítulos 4 e 5 contém os axiomas de congruência de triângulos e o teorema do ângulo externo.
5. O axioma das paralelas e consequências está no capítulo 6.
6. No capítulo 7 apresentamos os casos de semelhança de triângulos.
7. Os assuntos de polígonos, círculos e áreas estão descritos nos capítulo 8, 9 e 10, respectivamente.
8. Encerramos com o capítulo **??** onde apresentamos os temas a serem desenvolvidos nas práticas de ensino.

Desenvolvemos este estudo da Geometria Euclidiana Plana, retirando os axiomas dos textos de [1] e [6]. Nestes textos encontramos uma boa gama de exercícios com um histórico feito em cada capítulo contando um pouco sobre o desenvolvimento de cada assunto. A completude da obra de Euclides, pode ser encontrada na tradução de “Os Elementos”por Irineu Bicudo, em [2].

Capítulo 1

Desenvolvimento Teórico e histórico da Geometria

Esta aula está baseada nos seguintes textos: [1], [2], [3], [6] e [5]. Iniciamos fazendo algumas considerações sobre lógica antes iniciarmos a parte histórica.

Entende-se que uma teoria matemática resulta da interação de dois fatores, um conjunto de postulados[1] e uma lógica. O conjunto de postulados constitui a base da qual a teoria brota e a lógica proporciona as regras pelas quais essa base pode se expandir para transformar-se num corpo de teoremas. Ambos os fatores são importantes e o estudo do primeiro constitui o objeto da axiomática. A axiomática objetiva os estudo das propriedades de conjuntos de postulados expressos dessa maneira que juntamente com a lógica proporciona as regras pelas quais essa base pode se expandir para transformar-se num corpo de resultados.

Os grandes fatores do desenvolvimento da axiomática, foram de um lado, as pesquisas modernas visando encontrar um conjunto de postulados aceitável para a geometria euclidiana e, de outro, a descoberta de geometrias não-euclidianas[2] igualmente consistentes.

Embora os gregos antigos tivessem desenvolvido consideravelmente a lógica formal e Aristóteles (384 -322 a.C.) tivesse sistematizado o material resultante, esse trabalho pioneiro foi levado a efeito totalmente com o uso da linguagem corrente. Os Matemáticos da atualidade entenderam que seria uma tarefa praticamente inútil, tendo em conta as preocupações modernas, continuar abordando a lógica dessa maneira. A fim de que essa matéria pudesse ser estudada com o caráter científico necessário, era

[1]Atualmente não se faz distinção entre Axiomas e Postulados.

[2]A Geometria Hiperbólica e a Geometria Esférica

necessário introduzir-se uma linguagem simbólica. A concretização desse intento resultou no que se chama hoje de *lógica simbólica* ou *lógica matemática.* Na lógica simbólica representam-se as várias relações entre proposições, classe, etc., por fórmulas cujos significados estão livres das ambiguidades tão comuns à linguagem corrente. Assim, dois quesitos devem ser assumidos para que possamos concordar que uma demonstração está correta: *1) Aceitação de algumas afirmações chamadas "Axiomas" ou "Postulados" sem justificativa adicional. 2) Aceitação de certas regras de raciocínio, isto é, aceitação de como, e quando, uma afirmação "segue logicamente" de outra.*

Deste modo, para se poder concordar quando uma demonstração está correta ainda precisamos fixar certas terminologias e símbolos a serem utilizados. Portanto, aceitaremos também o seguinte:*Os teoremas e símbolos usados no sistema axiomático deverão ter significado compreendido igualmente por todos.*

Segundo Bicudo [2], depois de Cauchy, Weierstrass, Bolzano, Dedekind, Cantor, Frege, Hilbert, Bourbaki, e outros grandes autores do século XIX e XX, o que compete ao matemático ao gerar uma teoria é definir os conceitos de que se servirá e *demonstrar as propriedades* desses conceitos.

Mas, definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos já definidos, e demonstrar um resultado (teorema, proposição, lema, ...) equivale a argumentar pela sua veracidade, usando as regras de inferência válidas fornecidas pela lógica, com base em resultados anteriormente demonstrados. Assim, um certo conceito c_0 é definido recorrendo-se aos conceitos $c_1, c_2, \cdots, c_n$, todos eles já definidos, tendo tais definições dos $c_1, c_2, \cdot, c_n$ ocorrido em função de outros conceitos, anteriores na estrutura.

Os conceitos não definidos são chamados *conceitos ou termos primitivos* e todos os outros, *conceitos ou termos derivados.* Estes conceitos admitidos sem demonstração são ditos *axiomas* (hoje não se faz qualquer distinção entre *postulado e axioma*), e os demais, demonstrados, *teorema, proposições, corolário e lema.*

Essa estruturação das disciplinas matemáticas em conceitos primitivos e derivados, axiomas e resultados fornecem "a arquitetura"da nossa ciência. E isso, conforme sustenta Bourbaki, as noções de demonstração dadas por Euclides, Arquimedes e Apolônio, não difere em nada da nossa. Agora, temos condições de prosseguir e apresentar um breve levantamento histórico da Geometria, retirado em grande parte de [5], e em seguida iniciarmos com os conceitos primitivos.

1.1 História da Geometria

A palavra "geometria" vem do grego "geometrien" onde "geo"significa terra e "metrien" medida. Geometria foi, em sua origem, a ciência de medição de terras. O historiador grego Heródoto (500 a.C.) atribuiu aos egípcios o início da geometria, mas outras civilizações antigas tais como os babilônios, os hindus e os chineses também possuiam muitas informações geométricas.

A geometria dos povos antigos era uma coleção de regras obtidas a partir de experimentações e observações de analogias, tentativas e de intuições. Assim, para os babilônios, no período de 2000 a 1600 a.C., a área do círculo era calculada tomando três vezes o quadrado do raio (isto é, eles tomavam como 3 o valor de π; este também era o valor de π para os chineses naquela época). Os egípcios de 1800 a.C., de acordo com o papiro de Rhind, usavam $(\frac{4}{3})^4 \approx 3,1604$ como valor aproximado de π. Muitas vezes, os egípcios tinham cálculos corretos; por exemplo, conheciam a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada. Por outro lado, a fórmula correta para o cálculo da área do retângulo, era por eles aplicada também a qualquer quadrilátero.

A matemática babilônica foi mais avançada que a dos egípcios na aritmética e álgebra; além disso, eles conheciam o tradicional teorema de Pitágoras, "num triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos", bem antes mesmo do que Pitágoras.

Os gregos, por volta de 600 a.C. com Tales de Mileto, foram os que iniciaram as investigações de cunho geométrico, estabelecendo a necessidade de se empregar o método dedutivo no lugar do método de tentativa e erro. Tales, segundo Proclus, visitou o Egito e a Babilônia tendo trazido desses lugares os conhecimentos geométricos da época. Com o objetivo de verificar a correção dos resultados executados, ele desenvolveu a primeira geometria lógica. O desenvolvimento organizado dos teoremas através de provas (demonstrações) foi característica da matemática grega, e uma prática inteiramente nova até então.

A sistematização iniciada por Tales foi continuada, nos dois séculos seguintes, por Pitágoras de Samos e seus discípulos. Em Crotona, sul da atual Itália, ele fundou uma irmandade que ficou conhecida como Escola Pitagórica. A fundamentação sistemática da geometria plana foi realizada por essa escola por volta de 400 a.C., em "Elementos"escrito pelo matemático Hipócrates de Chios.

Um século depois, Euclides de Alexandria, publicou sua obra "Elementos"[12], onde reuniu, praticamente, quase tudo que se conhecia de matemática até então. No século 4 a.C., Platão fundou sua famosa academia onde na entrada estava fixado o lema “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”. Euclides foi um discípulo da escola platônica.

Por volta de 300 a.C. ele produziu o tratamento definitivo da geometria grega e da teoria dos números nos seus treze volumes do “Elementos”. Neste tratado, Euclides colocou os trabalhos de Pitágoras nos livros I-IV e IX; no livro VIII, os de Architas; os de Eudoxo, nos livros V, VI e XII e os de Teeteto nos livros X e XIII. O livro “Elementos”se tornou, ao longo do tempo, a obra mais publicada e lida. Sua abordagem da geometria dominou o ensino desta matéria por mais de 2000 anos.

Fora tudo disso, o método axiomático usado por Euclides em “Elementos”é o protótipo de tudo que chamamos hoje de “matemática pura”. Ela é pura no sentido de “puro pensar”; nenhum experimento físico é preciso para verificar se suas afirmações são corretas, somente o raciocínio nas demonstrações precisa ser conferido.

Os “Elementos”de Euclides é puro no sentido de que esse trabalho não inclui aplicações práticas. Naturalmente, a geometria de Euclides tem um grande número de aplicações a problemas práticos na engenharia, mas eles não são mencionados em “Elementos”. Muitas vezes, resultados puramente matemáticos passam a ter importância em questões aplicadas, sendo por isso úteis à sociedade. Além disso, aquelas partes da Matemática que não têm sido “aplicadas”são também válidas à sociedade, tanto como trabalhos estéticos, comparados à música e à arte, como contribuição à expansão da consciência e do conhecimento do homem.

Matemáticos podem fazer uso da tentativa e erro, cálculo de casos especiais, computadores, ou outros meios para demonstrar teoremas. Para alguns dos mais importantes resultados em matemática foram, originalmente, dadas provas incompletas (o último Teorema de Fermat, por exemplo). Provas corretas serão dadas mais tarde e assim o trabalho matemático estará satisfeito.

As provas nos dão segurança de que os resultados são corretos. Em muitos casos elas nos dão resultados mais gerais. Um exemplo é o Teorema de Pitágoras, que generaliza resultados que os egípcios, hindus e outros povos conheciam só casos particulares. Finalmente, provas, muitas vezes, nos dão uma visão de relações entre coisas diferentes, nos forçando a organizar nossas idéias de um modo coerente.

Temos o direito de dar definições de termos novos baseados em outros que assumimos como indefinidos. Assim, no desenvolvimento da geometria plana que faremos nas próximas aulas, iremos assumir alguns termos que serão básicos para definir todos os outros termos geométricos no plano, a saber: - ponto; - reta. Esta lista constitui-se dos termos geométricos indefinidos ou termos primitivos.

Todo corpo axiomático que construiremos estará baseado nesses termos, e nas noções algébricas de conjunto, correspondência, aplicação, etc. Finalizaremos esta aula apresentando uma breve descrição, retirada de [3], do conteúdo desta obra majestal deixada por Euclides, *Os Elementos*.

1.2 Elementos de Euclides

Contrariamente à impressão muito difundida, os *Elementos* de Euclides não tratam apenas de geometria - contêm também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros.

O Livro I começa com definições, postulados e axiomas preliminares necessários. As primeiras vinte e seis tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem os três teoremas de congruência. As proposições I 27 e I 32 estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. As demais proposições do livro lidam com paralelogramos, triângulos e quadrados, com atenção especial a relações entre áreas. A proposição I 47 é o teorema de Pitágoras com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides e a proposição final, I 48, é o recíproco do teorema de Pitágoras. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos.

O Livro II, relativamente pequeno com suas quatorze proposições, lida com transformações de áreas e com a álgebra geométrica da escola pitagórica. É nele que se encontram os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas. As proposições II 12 e II 13 que, conjuntamente, em linguagem mais moderna, enunciam o seguinte: *Num triângulo obtusângulo (actuângulo), o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso (agudo), é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados acrescida (diminuída) do dobro do produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.* Assim, essas duas proposições estabelecem a generalização do teorema de Pitágoras hoje conhecida como "lei dos co-senos".

O Livro III, consistindo em trinta e nove proposições, contêm muitos dos teoremas familiares sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos associados que hoje fazem parte dos textos de geometria elementar.

No Livro IV, que tem apenas dezesseis proposições, discute-se a construção, com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos num círculo dado.

O Livro V é uma exposição magistral da teoria das proporções de Eudoxo. Foi por meio dessa teoria, aplicável tanto as grandezas comensuráveis como a grandezas incomensuráveis, que se resolveu o "escândalo lógico"decorrente da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos.

O Livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados, traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulo três figuras semelhantes descritas de maneira análoga; e muitos outros teoremas.

Os Livros, VII, VIII e IX, que no total têm cento e duas proposições, tratam da teoria elementar dos números. O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si. O Livro VIII ocupa-se largamente das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas. E no Livro IX encontram-se muitos teoremas significativos tais como a proposição IX 14 que equivale ao teorema fundamental da aritmética.

O Livro X focaliza os irracionais - isto é, segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado. Para muitos especialistas, esse livro é, talvez, o mais notável dos Elementos.

Os três livros restantes, XI, XII e XIII tratam de geometria sólida e cobrem grande parte do material, com exceção do que diz respeito à esfera, comumente encontrado nos textos para a escola secundária. As definições, os teoremas sobre paralelepípedos se encontram no Livro XI. O método de exaustão desempenha um papel importante na abordagem de volumes do Livro XII. No Livro XIII se desenvolvem construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

Capítulo 2

Axiomas de Incidência e Ordem

Ao estudarmos geometria plana, iniciamos com os termos indefinidos: ponto, reta e plano. O plano é visto como o conjunto em que os pontos são seus elementos e as retas, seus subconjuntos. Em outras palavras, imaginamos um plano como a superfície de uma folha de papel que se estende infinitamente em todas as direções. Nela um ponto é representado por uma pequena marca produzida pela ponta de um lápis quando pressionada sobre o papel e uma reta como um aglomerado retilíneo de pontos. Utilizaremos letras maiúsculas $A, B, C, \cdots$ para designar pontos e letras minúsculas $a, b, c, \cdots$ para designar retas. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

É comum fazer-se uso de desenhos, no entanto, deixamos claro que os desenhos devem ser considerados apenas como um instrumento de ajuda à nossa intuição e linguagem e não como demonstrações dos resultados ora apresentados.

O primeiro grupo de axiomas que apresentamos nesta aula é constituído pelos ***Axiomas de Incidência*** e estes são satisfeitos pelas figuras geométricas elementares no plano, ou seja, os pontos e as retas.

Axioma 2.1 *Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.*

Axioma 2.2 *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.*

A seguir apresentamos uma sequência de axiomas que tratam da relação de um ponto localizar-se entre dois outros de uma mesma reta. Estes axiomas são chamados de ***Axiomas de Ordem***.

Axioma 2.3 *Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.*

Para apresentarmos o próximo axioma, dizemos pontos de uma mesma reta são **pontos colineares**.

Axioma 2.4 *Existem pelo menos três pontos distintos não colineares (Figura 2.1).*[1]

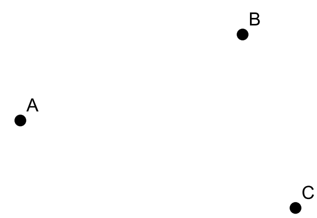


Figura 2.1: Os pontos A, B e C são não colineares.

Axioma 2.5 *Dados dois pontos distintos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.*

Uma consequência imediata deste axioma é que, entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos.

Definição 2.6 *O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento o qual denotaremos por AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento (Figura 2.2).*

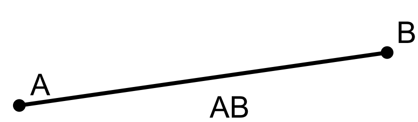


Figura 2.2: Segmento AB entre os pontos A e B.

Definição 2.7 *Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semi-reta de origem A contendo o ponto B, e é representada por s_{AB}. O ponto A é denominado origem da semi-reta s_{AB} (Figura 2.3).*

Figura 2.3: Segmento AB entre os pontos A e B.

Note que dois pontos A e B determinam duas semi-retas s_{AB} e s_{BA} as quais contêm o segmento AB.

Também é uma consequência deste último axioma que uma semi-reta s_{AB} contém uma infinidade de pontos além daqueles contidos no segmento AB.

Agora, considere uma reta r e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta. Diremos que A e B estão em um mesmo lado da reta r se o segmento AB não a intercepta.

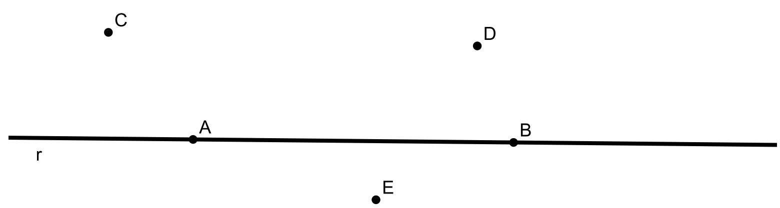


Figura 2.4: Os pontos C e D estão do mesmo lado da reta r. O ponto E está do lado contrário ao lado de C e D.

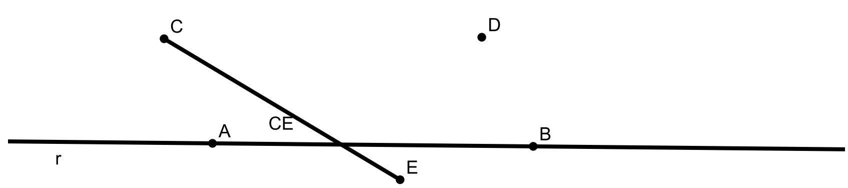


Figura 2.5: Segmento CD corta a reta r.

Neste ponto, temos condições de apresentar a definição de semi-plano e posteriormente o último dos axiomas de ordem.

Definição 2.8 *Sejam r uma reta e A um ponto que não pertence a reta r. O conjunto constituído pelos pontos de r e por todos os pontos B tais que A e B estão em um*

[1]Em outras, nem todos os pontos do plano são colineares.

mesmo lado da reta r é chamado de semi-plano determinado por r contendo A, e será representado por P_{rA} (Figura 2.6).

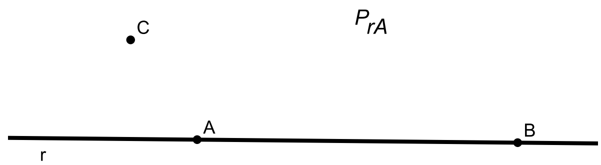


Figura 2.6: Semi-plano P_{rA}.

Axioma 2.9 *Dados três pontos distintos de uma reta*[2]*, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.*

Encerraremos esta aula com a apresentação de dois resultados. Para isto, quando duas retas têm um ponto em comum diz-se elas se intersectam ou que elas se cortam naquele ponto. Duas **retas** são **paralelas** se não se intersectam. Duas retas distintas que se intersectam são chamadas **retas concorrentes**.

Proposição 2.10 *Duas retas distintas ou não intersectam ou se intersectam em um único ponto.*

Demonstração: Sejam r e s duas retas distintas. A interseção destas duas retas não pode conter dois pontos (ou mais) pontos, do contrário, pelo axioma 2.2, elas coincidiriam. Logo a interseção de r e s é vazia ou contém apenas um ponto. ■

Proposição 2.11 *Para as semi-retas determinadas por dois pontos A e B tem-se:*

a) $s_{AB} \cup s_{BA}$ *é a reta determinada por A e B;*

b) $s_{AB} \cap s_{BA} = AB$.

Demonstração: Faça como exercício. ■

[2]Pontos de uma mesma reta são chamados **pontos colineares**

Capítulo 3

Axiomas de Medição

As primeiras idéias geométricas surgiram devido à necessidade do homem de efetuar medidas, dentre elas a de comprimento, ângulo e área. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Iniciamos esta aula com axiomas que fazem uso de propriedades dos números reais. Para uma referência, consulte [4].

3.1 Axiomas de Medição: Segmentos

Axioma 3.1 *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.*

O número a que se refere este axioma é chamado de **distância** entre os pontos ou é referido como o comprimento do segmento determinado pelos dois pontos.

Axioma 3.2 *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais (figura 3.1), ou seja, podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que:*

1. *cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real,*

2. *cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e*

3. *a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre estes números correspondentes.*

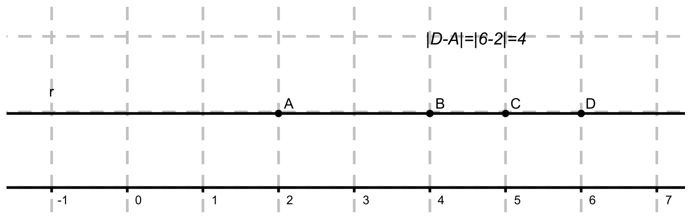


Figura 3.1: Pontos de uma reta e a reta dos numeros reais

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado **coordenada** daquele ponto.

Segundo o axioma 3.1 o comprimento de um segmento AB é sempre maior do que zero. Assim, se a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, o seu comprimento será a diferença entre o maior e o menor destes números, ou seja, o valor absoluto da diferença entre eles. Nós indicaremos o comprimento do segmento AB pelo símbolo $\overline{AB}$. Portanto,

$$\overline{AB} = |b - a|.$$

Axioma 3.3 *Se o ponto C encontra-se entre A e B então*

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

Com estes três axiomas 3.1, 3.2 e 3.3 podemos relacionar a ordenação dos pontos de uma reta, introduzida através dos axiomas 3.1 e 3.2, com a ordem dos números reais. Os números reais são ordenados pela relação "menor do que" (ou pela relação "maior do que"), e faz sentido dizer que um número c está entre dois outros a e b, quando ocorre $a < c < b$ ou $b < c < a$.

Proposição 3.4 *Se, em uma semi-reta s_{AB}, considerarmos um segmento AC com $\overline{AC} < \overline{AB}$, então o ponto C estará entre A e B (Figura 3.2).*

Demonstração: Como o ponto A é a origem da semi-reta s_{AB} que contém os pontos B e C, temos que A não está entre B e C. Se o ponto B estivesse entre A e C então, pelo axioma 3.3, teríamos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e, como consequência $\overline{AB} < \overline{AC}$. Mas esta desigualdade é contrária a hipótese $\overline{AC} < \overline{AB}$. Logo, é o ponto C que está entre A e B. ■

Figura 3.2: Semi-reta s_{AB} e C ponto com $AC < AB$.

Teorema 3.5 *Sejam A, B e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se e só se o número c está entre a e b.*

Demonstração: Se C está entre A e B então pelo axioma 3.3, tem-se que $\overline{AC}+\overline{CB} = \overline{AB}$, ou seja

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Suporemos inicialmente que $a < b$. Neste caso, segue da igualdade acima que

$$|c - a| < b - a \quad \text{e} \quad |b - c| < b - a.$$

Dai, $c - a < b - a$ e $b - c < b - a$. Portanto, $c < b$ e $a < c$. Assim, resulta que c está entre a e b. O caso $b < a$ segue analogamente.

Reciprocamente, se o número c está entre os números a e b então

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Segue-se dai que$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Em particular

$$\overline{AC} < \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{CB} < \overline{AB}.$$

O ponto C está entre A e B pois caso C fosse separado pelo ponto A então seria o ponto A que estaria entre B e C donde teríamos $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$. Daí resulta que $\overline{BA} < \overline{BC}$ o que está em contradição com a desigualdade obtida acima. Isto prova a afirmação e conclui a demonstração do teorema. ■

Definição 3.6 *O ponto médio do segmento AB é um ponto C tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$. (Figura 3.3)*

Teorema 3.7 *Um segmento tem exatamente um ponto médio.*

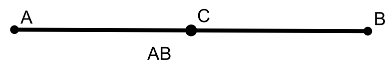


Figura 3.3: Ponto médio C do segmento AB

Demonstração: Faça como exercício. ■

A noção de distância é uma das noções mais básicas da geometria. Pelo que já vimos ela satisfaz às seguintes propriedades:

- Para quaisquer dois pontos A e B do plano, tem-se $\overline{AB} \geq 0$. Além disso, $\overline{AB} = 0$ se e somente se $A = B$.

- Para quaisquer dois pontos A e B tem-se que $\overline{AB}$=$\overline{BA}$.

Uma outra importante propriedade da distância é a desigualdade triangular:

- Para quaisquer três pontos A, B e C do plano tem-se $\overline{AC} \geq \overline{AB}+\overline{BC}$. Igualdade ocorre se e somente se B pertence ao segmento AC.

Encerramos esta aula com a definição de círculo.

Definição 3.8 *O lugar geométrico dos pontos que equidistam um número real r de um ponto A será chamado de* ***círculo*** *de raio r e é constituido dos pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.*

3.2 Axiomas de Medição: Ângulos

A noção de ângulo, bem como das principais figuras geométricas, já era conhecida por muitos povos, desde os babilônios e assírios, que as utilizavam na medida de área e na astronomia. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Definição 3.9 *Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem. Se um ângulo é formado pelas semi-retas s_{AB} e s_{AC} então essas semi-retas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou CAB e representado por $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$, respectivamente (Figura 3.2).*

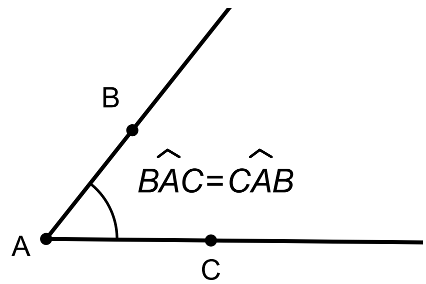


Figura 3.4: Ângulo é formado pelas semi-retas s_{AB} e s_{AC}

Usualmente denominaremos o ângulo BAC ou CAB simplesmente por A e denotaremos por $\widehat{A}$, salvo situações onde houver conflitos com alguma outra notação.

Axioma 3.10 *Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.*

Para facilitar o entendimento do próximo axioma, apresentaremos a seguinte definição.

Definição 3.11 *Diremos que uma semi-reta divide um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina (Figura 3.5).*

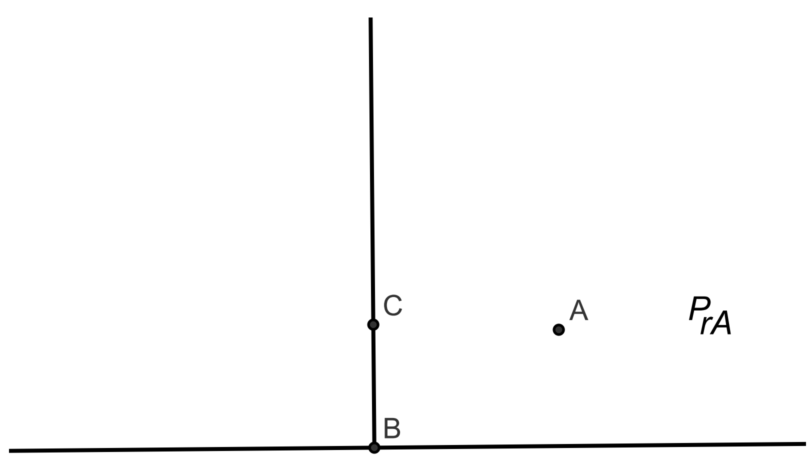


Figura 3.5: Uma semi-reta que divide um semi-plano

Axioma 3.12 *É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semi-retas da mesma origem que dividem um dado semi-plano,* *de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes (Figura 3.6).*

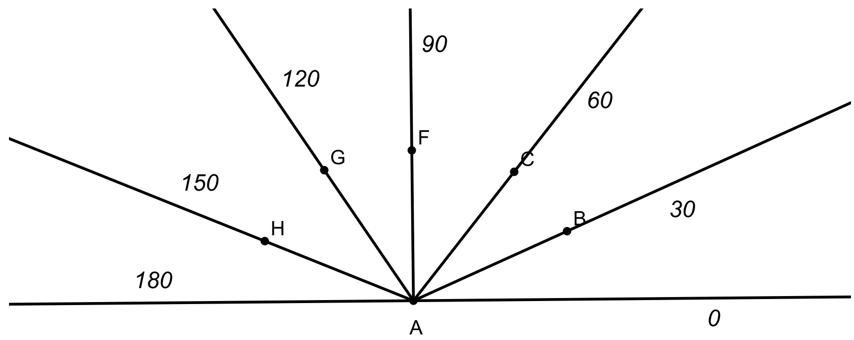


Figura 3.6: Correspondência entre os números reais entre zero e 180 e as semi-retas da mesma origem

Ao fazer tal correspondência chamamos o número que corresponde a uma dada semi-reta de *coordenada* da semi-reta. Se a e b forem as coordenadas dos lados do ângulo $A\widehat{O}B$, então $|a-b|$ é a medida deste ângulo. Indicaremos um ângulo e a sua medida pelo mesmo símbolo. Assim escreveremos de uma maneira geral, $A\widehat{O}B = |a-b|$.

Definição 3.13 *Um ângulo cuja medida é 90 ou 180 graus é chamado ângulo reto ou ângulo raso, respectivamente.*

Os ângulos são medidos em graus com o auxílio de um transferidor. Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta, é um exemplo de *ângulo raso*.

Definição 3.14 *Sejam s_{OA}, s_{OB} e s_{OC} semi-retas de mesma origem. Se o segmento AB interceptar s_{OC} diremos que s_{OC} divide o ângulo $A\widehat{O}B$ (Figura 3.7).*

Axioma 3.15 *Se uma semi-reta s_{OC} divide um ângulo $A\widehat{O}B$, então*

$$A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B.$$

Definição 3.16 *Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é 180 graus. O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.*

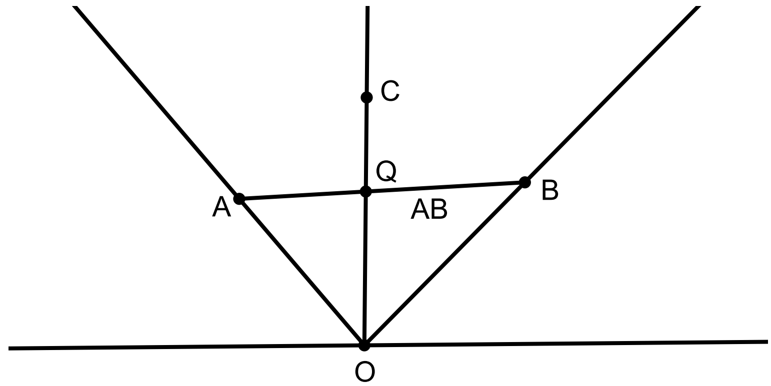


Figura 3.7: s_{OC} divide o ângulo $A\widehat{O}B$.

Quando duas retas distintas se interceptam, formam-se quatro ângulos, conforme indica a figura 3.8. Os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são *opostos pelo vértice*. Do mesmo modo os ângulos $A\widehat{O}D$ e $B\widehat{O}C$.

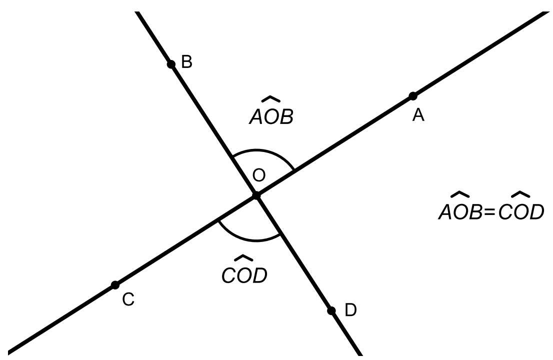


Figura 3.8: Angulos opostos pelo vértice.

Proposição 3.17 *Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.*

Demonstração: De fato, se $A\widehat{O}B$ e $D\widehat{O}C$ são ângulos opostos pelo vértice, então eles têm o mesmo suplemento: $A\widehat{O}D$. Logo

$$A\widehat{O}B + A\widehat{O}D = 180 = D\widehat{O}C + A\widehat{O}D$$

Portanto $A\widehat{O}B = 180 - A\widehat{O}D = D\widehat{O}C$. ■

Uma consequência imediata deste resultado é quando duas retas distintas se intersectam, se um dos quatro ângulos formados por elas for reto, então todos os outros também o serão. Neste caso diremos que as retas são *perpendiculares*.

Teorema 3.18 *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.*

Demonstração: (*Existência*) Dada uma reta r e um ponto A sobre ela, as duas semi-retas determinadas por A de r formam um ângulo raso. Considere um dos semi-planos determinados pela reta r. De acordo com o axioma 3.12, entre todas as semi-retas com origem A, que dividem o semi-plano fixado, existe uma cuja coordenada será o número 90. Esta semi-reta forma, com as duas semi-retas determinadas pelo ponto A sobre a reta r, ângulos de 90 graus[1]. Portanto ela é perpendicular a reta r.

(*Unicidade*) Suponha que existissem duas retas r_1 e r_2 passando pelo ponto A e perpendiculares a r. Fixe um dos semi-planos determinados por r. As interseções das retas r_1 e r_2 com este semi-plano são semi-retas que formam um ângulo α e formam outros dois ângulos β e γ com as semi-retas determinadas pelo ponto A na reta r.

Como r_1 e r_2 são perpendiculares a r então $\beta = \gamma = 90°$. Por outro lado, devemos ter $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Logo $\alpha = 0°$ e as retas r_1 e r_2 coincidem. ■

Neste momento temos condições de introduzir alguns conceitos importantes. Iniciamos com a definição de círculo (ou circunferência) apresentando em seguida os conceitos de corda, diâmetro e raio.

Definição 3.19 *Sejam A um ponto e r um número real positivo. Definimos a Círculo (ou Circunferência) de centro A e raio r, a qual denotamos por $C(A, r)$, como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto A.*

O *interior (exterior)* de $C(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos X tais que $\overline{AX} < r$ $(\overline{AX} > r)$. Um ponto desse tipo é chamado *ponto interior (ponto exterior)* da circunferência. A união de uma circunferência com seu interior é chamada uma **região circular** ou **círculo**.

Definição 3.20 *Chamamos de* corda *de uma circunferência qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. Qualquer corda de uma circunferência que contenha seu centro é chamada* diâmetro *da circunferência. Um* raio *é também um segmento com uma extremidade sendo um ponto da circunferência e a outra o centro da mesma.*

[1] Em alguns casos denotaremos 90 graus por 90°

Definição 3.21 *Chamamos de* corda *de uma circunferência qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. Qualquer corda de uma circunferência que contenha seu centro é chamada* diâmetro *da circunferência. Um* raio *é também um segmento com uma extremidade sendo um ponto da circunferência e a outra o centro da mesma.*

Capítulo 4

Axiomas de Congruências

Nesta aula apresentaremos os três casos de congruências e alguns resultados que são consequências destes. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Definição 4.1 *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles têm mesma medida. Utilizaremos, por simplicidade de notação, o símbolo $=$[1] para significar congruência de segmentos ou ângulos.*[2]

Definição 4.2 *Dois triângulos são conguentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Dados dois triângulos ABC e DEF, diremos que estes são congruentes se ao identicarmos os vértices $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$ e $C \longleftrightarrow F$ tivermos que são válidas todas as relações abaixo:

$$\begin{array}{ccc} AB = DE & BC = EF & AC = DF \\ \widehat{A} = \widehat{D} & \widehat{B} = \widehat{E} & \widehat{C} = \widehat{F} \end{array}$$

Escreveremos $ABC = DEF$ para significar que os triângulos ABC e DEF são congruentes e que a congruência leva A em D, B em E e C em F.

[1] Em alguns texto utiliza-se o símbolo $\cong$ para designar congruência

[2] $AB = CD$ deve ser lido como "o segmento AB é congruente ao CD"e $\widehat{A} = \widehat{B}$ deve ser lido como "o ângulo $\widehat{A}$ é congruente ao $\widehat{B}$".

Axioma 4.3 (LAL) *Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $AC = DF$ então $ABC = DEF$ (Figura 4.1).*

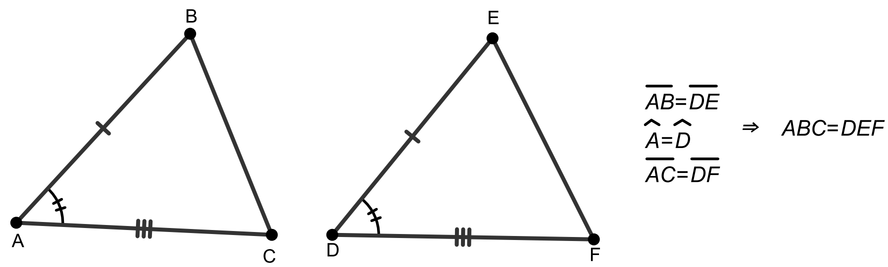


Figura 4.1: Triângulos ABC e DEF congruentes pelo caso LAL

Este axioma é conhecido como o *primeiro caso de congruência de triângulos.* Outros dois casos serão apresentados a seguir.

Teorema 4.4 (2° caso de congruência de triângulos - A.L.A.) *Dados dois triângulos ABC e DEF, $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$, então $ABC = EFG$.*

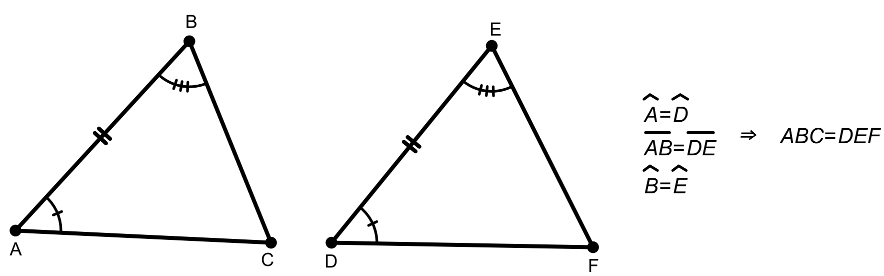


Figura 4.2: Triângulos ABC e DEF congruentes pelo caso ALA

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$. Seja P um ponto da semi-reta s_{AC} tal que $AP = DF$.

Ao compararmos os triângulos ABP e DEF, como $AP = DF$, $AB = DE$ e $\widehat{A} = \widehat{D}$ segue do axioma 4.3 que $ABP = DEF$. Como consequência temos que $A\widehat{B}P = \widehat{E}$. Mas por hipótese $\widehat{E} = \widehat{B} = A\widehat{B}C$ e dai decorre que $A\widehat{B}P = A\widehat{B}C$. Mas então o ponto P coincide com o ponto C e portanto os triângulos ABC e ABP coincidem. Como $ABP = DEF$ segue que $ABC = DEF$ ■

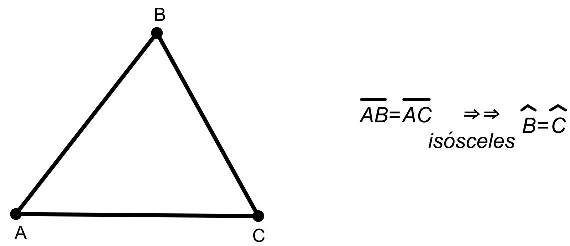


Figura 4.3: Triângulo isósceles

Definição 4.5 *Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados laterais, e o terceiro lado é chamado de base (Figura 4.3).*

Proposição 4.6 *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo em que $AB = AC$. Pretende-se provar que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Para isto compare o triângulo ABC com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$\widehat{A} \longleftrightarrow \widehat{A} \quad \widehat{B} \longleftrightarrow \widehat{C} \quad \widehat{C} \longleftrightarrow \widehat{B}$$

Por hipótese, $AB = AC$ e $AC = AB$. Como $\widehat{A} = \widehat{A}$, segue-se (pelo axioma 4.3) que esta correspondência define uma congruência. Como consequência têm-se $\widehat{B} = \widehat{C}$. ■

Proposição 4.7 *Se, em um triângulo ABC, tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles (Figura 4.4).*

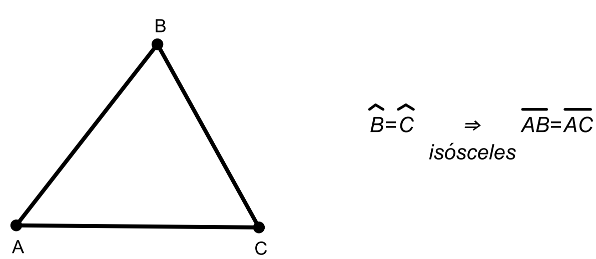


Figura 4.4: Triângulo isósceles

Demonstração: Seja ABC um triângulo em que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Mostraremos que $AB = AC$.

Ao compararmos o triângulo ABC com ele mesmo, fazendo corresponder os vértices $\widehat{A} \longleftrightarrow \widehat{A}$ $\widehat{B} \longleftrightarrow \widehat{C}$ $\widehat{C} \longleftrightarrow \widehat{B}$ e como por hipótese $\widehat{B} = \widehat{C}$ e $\widehat{C} = \widehat{B}$, segue-se (pelo teorema 4.4) que esta correspondência define uma congruência já que $BC = CB$. Como consequência $AB = BC$. ■

Definição 4.8 *Seja ABC um triângulo e seja M um ponto da reta que contém B e C. O segmento AM chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC, se M for o ponto médio de BC. O segmento AM chama-se bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ se a semi-reta s_{AM} divide o ângulo $C\widehat{A}B$ em dois ângulos congruentes, isto é, se $C\widehat{A}M = M\widehat{A}B$. O segmento AM chama-se altura do triângulo relativamente ao lado BC, se AM for perpendicular a reta que contém B e C (Figura 4.5).*

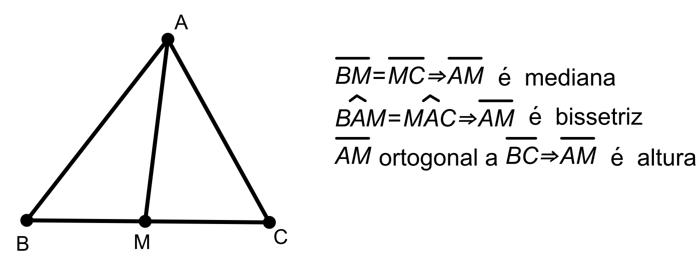


Figura 4.5: Altura, bissetriz e mediana de um triângulo

Proposição 4.9 *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também bissetriz e altura.*

Demonstração: Faça como exercício. ■

Encerramos esta aula com o terceiro caso de congruência.

Teorema 4.10 (3◦ caso de congruência de triângulos - L.L.L.) *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes (Figura 4.6).*

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $AB = DE$, $BC = EF$ e $AC = DF$. Provaremos que $ABC = DEF$.

Neste sentido, construa, a partir da semi-reta s_{AB} e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo $\widehat{D}$. No lado deste ângulo que não

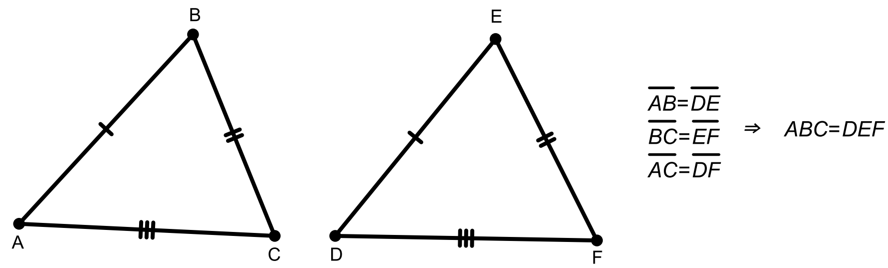


Figura 4.6: Triângulos ABC e DEF congruentes pelo caso LLL

contém o ponto B, marque um ponto P tal que $AP = DF$ e ligue P a B. Como $AB = DE$ (por hipótese), $AP = DF$ (por construção) e $P\widehat{A}B = \widehat{D}$ (por construção), então $ABP = DEF$.

Note que os triângulos ABC e ABP são congruentes. Para isto trace CP. Como $AP = DF = AC$ e $PB = EF = BC$, então os triângulos APC e BPC são isósceles. Segue-se que $A\widehat{P}C = A\widehat{C}B$. Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABP = ABC$. Como já tinhamos provado que $ABP = DEF$, concluímos que $ABC = DEF$. ■

Capítulo 5

Teorema do Ângulo Externo e Consequências

Nesta aula, apresentamos o Teorema do Ângulo Externo para triângulos, o que nos permite demonstrar mais um caso de congruência de triângulos, o caso L.A.A. Apresentamos também outros resultados envolvendo desigualdades, entre eles os conhecidos como casos de "dobradiça". Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Definição 5.1 *Se ABC é um triângulo, os seus ângulos $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}A$ e $C\widehat{A}B$ são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.*

Teorema 5.2 (Teorema do Ângulo Externo) *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes (Figura 5.1).*

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Na semi-reta s_{CA} marque um ponto D tal que A esteja entre C e D. Provaremos que $B\widehat{A}D > \widehat{B}$ e $B\widehat{A}D > \widehat{C}$. Para provar que $B\widehat{A}D > \widehat{B}$, considere o ponto médio E do segmento AB.

Na semi-reta s_{CE}, marque um ponto F tal que $CE = EF$. Trace AF. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $BE = AE$ (já que E é o ponto médio de AB), $CE = EF$ (por construção) e $B\widehat{E}C = A\widehat{E}F$ (por serem opostos pelo vértice), segue-se que $BEC = AEF$. Consequentemente $\widehat{B} < B\widehat{A}D$. A prova de que $B\widehat{A}D > \widehat{C}$ deixamos a cargo do leitor. ■

Proposição 5.3 *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que* $180°$.

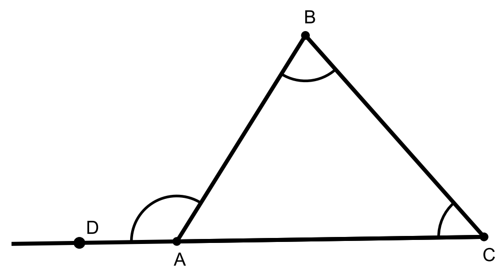


Figura 5.1: Angulo externo maior que os internos não adjacentes

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Mostraremos que $\widehat{B}+\widehat{C}<180°$. Seja θ o ângulo externo deste triângulo com vértice em C. Pela proposição anterior temos que $\theta>\widehat{B}$.

Como θ e $\widehat{C}$ são suplementares, então $\theta+\widehat{C}=180°$. Portanto, $\widehat{B}+\widehat{C}<\theta+\widehat{C}=180°$.
■

Um consequência imediata desta proposição é o seguinte resultado.

Corolário 5.4 *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

Corolário 5.5 *Se duas retas distintas r_1 e r_2 são perpendiculares a uma terceira, então r_1 e r_2 não se interceptam.*

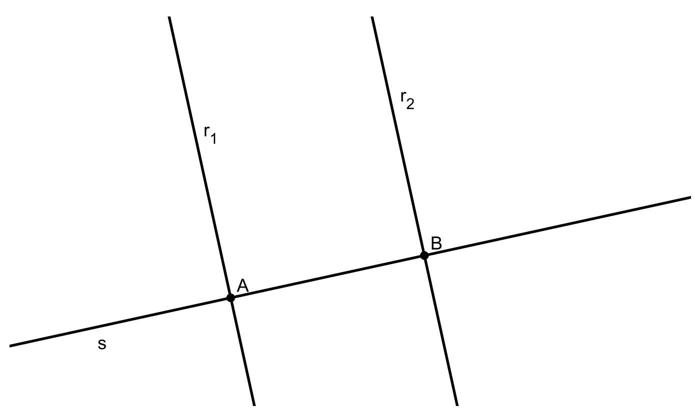


Figura 5.2: Retas r_1 e r_2 perpendiculares a reta s

Demonstração: Se r_1 e r_2 se interceptassem formar-se-ia um triângulo com dois ângulos retos, o que é um absurdo pelo corolário anterior. ■

Definição 5.6 *Duas retas que não se interceptam são ditas paralelas.*

A proposição seguinte fornece um método de construção de retas perpendiculares e também de retas paralelas (juntamente com o corolário 5.5).

Proposição 5.7 *Por um ponto fora de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular a reta dada.*

Demonstração: (Existência). Seja r uma reta e A um ponto fora desta reta. Tome sobre r dois pontos B e C distintos. Trace AB. Se AB já é perpendicular a r, terminamos a construção. Caso contrário, considere, no semi-plano que não contém A, uma semi-reta com origem B formando com s_BC um ângulo congruente a $A\widehat{B}C$. Nesta semi-reta tome um ponto A' tal que $BA' = BA$, chamado reflexo do ponto A relativamente a reta r. O segmento AA' é perpendicular a r. De fato, como $BA = BA'$, o triângulo ABA' é isósceles. Como $A\widehat{B}C = C\widehat{B}A'$, então BC é bissetriz do ângulo $A\widehat{B}A'$. Segue-se, então, que BC é perpendicular a AA'.

(Unicidade) Se existissem duas retas distintas passando pelo ponto A e sendo ambas perpendiculares a reta r, formar-se-ia um triângulo com dois ângulos retos, o que é absurdo de acordo com o corolário 5.4. ■

O ponto A' reflexo de A relativamente a r é caracterizado pelas seguintes condições:

a) AA' é perpendicular a r, e

b) r corta AA' no seu ponto médio.

A função F_r que associa a cada ponto do plano, o seu reflexo relativamente a uma reta fixada r, é chamada *reflexão* e tem as seguintes propriedades:

i) $F_r(F_r(A)) = A$ para todo ponto A,

ii) $F_r(A) = A$ se e somente se A é ponto da reta r,

iii) $\overline{F_r(A)F_r(B)} = \overline{AB}$, ou seja, F_r preserva a distância entre pontos do plano, e

iv) se $A \in r$, B@@@r e $B' = F_r(B)$ então r é a bissetriz do ângulo $B\widehat{A}B'$.

Dado um ponto A e uma reta r, a perpendicular a r passando por A intercepta r em um ponto P chamado: *pé da perpendicular* baixada do ponto A sobre a reta r. Se Q é qualquer outro ponto de r, o segmento AQ é dito ser oblíquo relativamente a r.

O segmento QP é chamado de *projeção do segmento* QA sobre a reta r. É uma consequência da proposição seguinte que $\overline{QA} > \overline{QP}$ e que $\overline{QA} > \overline{AP}$. O número $\overline{AP}$ é chamado de *distância* do ponto A à reta r.

Dado um triângulo ABC diremos que o lado BC *opõe-se* ao ângulo $\widehat{A}$ ou, de maneira equivalente, que o ângulo $\widehat{A}$ é oposto ao lado BC.

Proposição 5.8 *Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração: Faça como exercício. ■

Proposição 5.9 *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Demonstração: A primeira parte da proposição é uma consequência imediata de proposições da aula anterior. Para provar a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $C\widehat{A}B < C\widehat{B}A$ e vamos mostrar que $\overline{BC} < \overline{AC}$. Observe que, existem três possibilidades: $\overline{BC} < \overline{AC}$, $\overline{BC} > \overline{AC}$ e $\overline{BC} = \overline{AC}$.

Se $\overline{BC} > \overline{AC}$ então, pela proposição anterior, deveríamos ter $C\widehat{A}B > C\widehat{B}A$, o que é contrário a nossa hipótese. Do mesmo modo, se ocorresse $\overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo seria isósceles e $C\widehat{A}B = C\widehat{B}A$, o que está também em desacordo com nossa hipótese.

Logo deve ocorrer $\overline{BC} < \overline{AC}$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 5.10 *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC mostraremos que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. Para isto, marque um ponto D na semi-reta s_{AB}, de modo que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Segue-se que $\overline{BD} = \overline{CB}$ e, portanto, o triângulo BCD é isósceles com base CD. Logo, teremos $B\widehat{A}D = B\widehat{D}C$. Como B está entre A e D, então $B\widehat{C}D < A\widehat{C}D$. Segue-se que no triângulo ACD tem-se $B\widehat{D}C < A\widehat{C}D$. Logo, pela proposição anterior, $\overline{AC} < \overline{AD}$. Mas então $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. ■

Teorema 5.11 (Desigualdade Triangular) *Dados três pontos distintos A, B e C do plano, tem-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. Igualdade ocorre se e somente se B pertence ao segmento AC.*

Demonstração: Se A, B e C não estão sobre uma mesma reta, então eles determinam um triângulo e a desigualdade é consequência do teorema anterior. Se estão sobre uma mesma reta, sejam a, b e c, respectivamente, as suas coordenadas. Neste caso é simples verificar que

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

e que igualdade ocorre se e somente se b está entre a e c. O resultado agora é uma consequência do teorema 3.5 da aula sobre Medição. ■

A desigualdade triangular é a única restrição para que se possa construir um triângulo com comprimento dos lados pré-determinados. Por exemplo, de acordo com esta desigualdade é impossível construir-se um triângulo cujos lados sejam 5, 3 e 9.

Proposição 5.12 *Sejam a, b e c três números positivos. Suponha que $|a-b| < c < a+b$. Então pode-se construir um triângulo cujos lados medem a, b e c.*

Demonstração: Trace uma reta e sobre ela marque dois pontos A e B tais que $\overline{AB} = c$. Com um compasso descreva um círculo de centro A e raio b, e um círculo de centro B e raio a.

Como $|a-b| < c < a+b$, os dois círculos se interceptam. Chame quaisquer dos pontos da interseção de C. O triângulo ABC tem lados medindo a, b e c como desejado.

■

Definição 5.13 *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado* triângulo retângulo*. O lado oposto ao ângulo reto é chamado* hipotenusa*, e os outros dois lados são denominados* catetos*.*

Segundo o corolário 5.4 os ângulos opostos aos catetos são agudos e como consequência da proposição 5.9 temos que a hipotenusa é maior do que qualquer dos catetos. Por outro lado, pela desigualdade triangular, o comprimento da hipotenusa é menor do que a soma dos dois catetos. Se dois triângulos retângulos são congruentes então, necessariamente, os ângulos retos devem-se corresponder.

Assim, além dos três casos de congruência que já conhecemos, existem outros três específicos para triângulos retângulos. Estes são apresentados no teorema seguinte.

Teorema 5.14 (Congruência de Triângulos Retângulos) *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:*

1. $BC = B'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$,[1]

[1] cateto e ângulo oposto

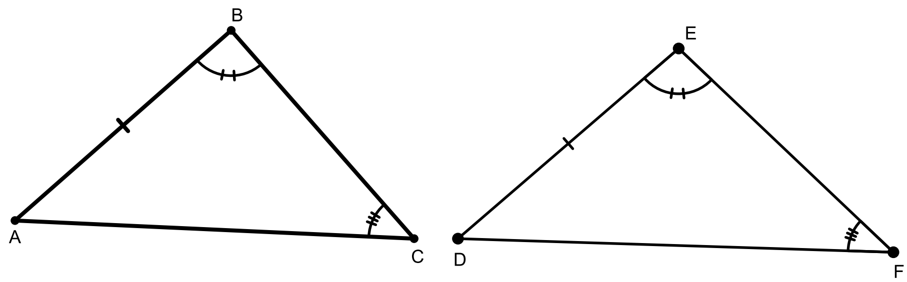


Figura 5.3: Congruência pelo caso LAA.

2. $AB = A'B'$ *e* $BC = B'C'$, *e*[2]

3. $AB = A'B'$ *e* $\widehat{A} = \widehat{A'}$.[3]

Demonstração: Nossas hipóteses para resolvermos o primeiro caso são as seguintes: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $BC = B'C'$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (*reto*). Para provar que ABC e $A'B'C'$ são congruentes marque um ponto D sobre a semi-reta s_{CA} de sorte que $CD = C'A'$. Os triângulos CDB e $C'A'B'$ são então congruentes, pelo primeiro caso de congruência.

Como consequência, tem-se que $C\widehat{D}B = \widehat{A'}$. Desde que $C\widehat{A}B = \widehat{A'}$ (por hipótese), concluímos que $C\widehat{D}B = C\widehat{A}B$.

Note que A e D coincidem pois caso isto não ocorresse A, D e B formariam um triângulo em que os ângulos $C\widehat{D}B$ e $C\widehat{A}B$ seriam ângulos externo e interno não adjacentes, e assim pelo teorema do ângulo externo a igualdade acima não poderia ocorrer. De A e D coincidirem segue que $CAB = CDB$. Ainda, $CDB = C'A'B'$ donde conclui-se que $CAB = C'A'B'$. ■

Uma consequência do Teorema do Ângulo Externo 5.2 é um quarto caso de congruência de triângulos.

Teorema 5.15 (4° caso de congruência de triângulos - L.A.A.) *Sejam* ABC *e* DEF *dois triângulos tais que* $AB = DE$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ *e* $\widehat{C} = \widehat{F}$. *Então* $ABC = DEF$ *(Figura 5.3).*

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos e consideremos P um ponto da semi-reta s_{BC} tal que $BX = EF$ com X, inicialmente, entre B e C.

[2]hipotenusa e cateto
[3]hipotenusa e ângulo adudo

Pelo Axioma de Congruência de triângulos, caso L.A.L., obtemos $ABX = DEF$. Disto, obtemos que

$$A\widehat{X}B = D\widehat{F}E.$$

Mas $A\widehat{X}B$ é um ângulo externo do triângulo AXC, do qual $A\widehat{C}X$ é ângulo interno não adjacente. Assim, pelo Teorema do Ângulo Externo 5.2 temos que $A\widehat{X}B > A\widehat{C}X$ e pela hipótese segue que $A\widehat{X}B > D\widehat{F}E$ o que contradiz 5.

Se X estisse depois de C, ou seja, C entre X e B, demonstraríamos analogamente que $A\widehat{X}B < D\widehat{E}F$. ■

Corolário 5.16 *Em todo triângulo retângulo cada cateto é menor que a hipotenusa.*

Corolário 5.17 *Dada uma reta r e um ponto P fora dela, o menor segmento com uma extremidade em P e outra na reta r é aquele que é perpendicular a r.*

Demonstração: Seja Q um ponto de r tal que $\overline{PQ}$ seja o único segmento com origem em P e perpendicular a ela. Seja R um ponto de r, distinto de Q.

O triângulo PQR assim formado é retângulo em Q com hipotenusa PR, sendo PQ um de seus catetos. Pelo corolário anterior, temos $PQ < PR$, chegando assim ao resultado procurado. ■

Encerramos esta aula com a definição de distância de um ponto a uma reta.

Definição 5.18 *Definimos a* distância de um ponto P a uma reta r *dada, o que denotamos por $d(P,r)$ como:*

a) se P está em r então $d(P,r) = 0,$;

b) se P não está em r então $d(P,r) = PP'$, onde $P' \in r$ e PP' é o menor segmento com uma extremidade em P e a outra em r.

Capítulo 6

Quinto Postulado de Euclides

Nesta aula trabalharemos o quinto postulado de Euclides, também conhecido como axioma das paralelas. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

O axioma que apresentamos a seguir diz, essencialmente, que duas retas paralelas a uma terceira e com um ponto em comum são coincidentes.

Axioma 6.1 *Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m.*

Uma consequência imediata deste axioma é o seguinte resultado.

Proposição 6.2 *Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2, então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.*

Demonstração: Suponha que n_1 e n_2 não coincidem e são paralelas a reta m. Se n_1 e n_2 não fossem paralelas entre si, elas teriam um ponto de interseção, digamos, P. Mas então n_1 e n_2 seriam distintas paralelas à reta m passando por P. Isto contradiz o axioma V. Logo n_1 e n_2 são paralelas. ■

Corolário 6.3 *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.*

Demonstração: Sejam n_1 e n_2 retas paralelas. Se uma reta m cortasse n_1 e não cortasse n_2, então m e n_2 seriam paralelas. Assim n_2 seria paralela a m e n_1. Como m e n_1 não são paralelas entre si nem coincidentes, temos uma contradição com a proposição anterior. Logo m corta também n_2. ■

Neste ponto surge uma questão: Se retas são infinitas em comprimento, como poderemos provar que duas retas não se interceptam?

Uma maneira simples de responder a esta pergunta é cortarmos as retas paralelas, digamos n_1 e n_2, por uma reta m e compararmos os ângulos formados entre m e n_1 ou m e n_2, respectivamente.

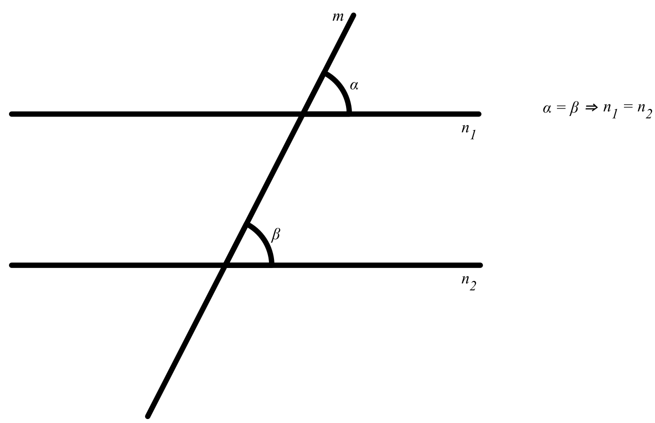


Figura 6.1: Retas paralelas cortadas por uma transversal.

Proposição 6.4 *Sejam n_1 e n_2 duas retas e sejam α e β o ângulo formado por estas retas com a reta m (veja figura 6.1). Se $\alpha = \beta$ então as retas n_1 e n_2 são paralelas.*

Demonstração: De fato, se n_1 interceptasse n_2 em algum ponto P, como representado na figura seguinte, formar-se-ia um triângulo ABP. Neste triângulo α é o ângulo externo e β é um ângulo interno não adjacente ao ângulo α, ou vice-versa. Assim, pelo teorema do ângulo externo teríamos $\alpha \neq \beta$ o que contradiz nossa hipótese. Portanto n_1 e n_2 não se interceptam. ■

Quando duas retas são cortadas por uma transversal formam-se oito ângulo como indicado na figura abaixo. Quatro deles são correspondentes aos outros quatro (Figura **??**), a saber

$$\begin{array}{ccc}
\hline
\widehat{1} & \longleftrightarrow & \widehat{2} \\
\widehat{3} & \longleftrightarrow & \widehat{4} \\
\widehat{5} & \longleftrightarrow & \widehat{6} \\
\widehat{7} & \longleftrightarrow & \widehat{8} \\
\hline
\end{array}$$

Note que $\widehat{1} = \widehat{7}$, $\widehat{2} = \widehat{8}$, $\widehat{3} = \widehat{5}$ e $\widehat{4} = \widehat{6}$ por serem opostos pelo vértice. Como consequência, se $\widehat{1} = \widehat{2}$ então todos os outros pares de ângulos correspondentes serão

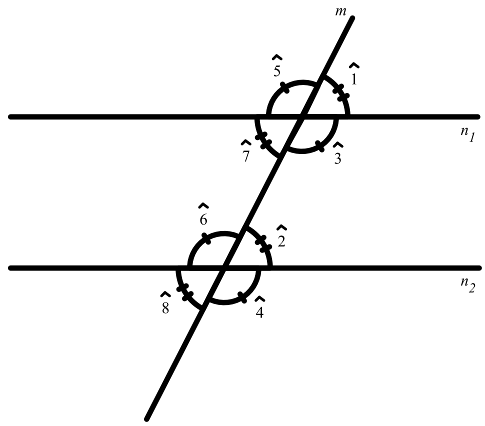


Figura 6.2: Ângulos opostos pelo vértice.

congruentes. Além disso, teremos que $\widehat{3}+\widehat{2}=180°$. Inversamente, se $\widehat{3}+\widehat{2}=180°$ então $\widehat{1}=\widehat{2}$. Estas observações permitem reescrever a proposição anterior de duas maneiras.

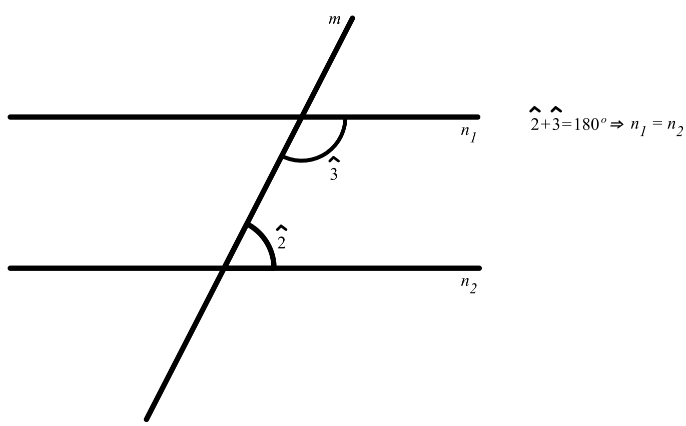


Figura 6.3: Ângulos implicando em paralelismo.

Proposição 6.5 *Se ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos* $\widehat{3}+\widehat{2}=180°$ *então as retas são paralelas.*

Proposição 6.6 *Se ao cortarmos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas são paralelas.*

O Axioma 6.1 permite-nos mostrar que a inversa desta proposição é também verdadeira.

Proposição 6.7 *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.*

Demonstração: Sejam m e m' nos pontos A e B, respectivamente. Considere uma reta m'' passando pelo ponto A e formando com a transversal quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados pela reta m' com a mesma transversal. De acordo com a proposição anterior m' e m'' são paralelas. De acordo com a proposição 6.2 e o Axioma 6.1, m e m'' são coincidentes. Portanto m forma ângulos com a reta n congruentes aos correspondentes formados por m' com a reta n. ∎

A seguir, apresentaremos duas consequências do Axioma das paralelas (Axioma 6.1).

Teorema 6.8 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é* $180°$.

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C trace uma reta paralela ao lado AB. Numere os triângulos formados com o vértice C, como indicado na figura 6.4.

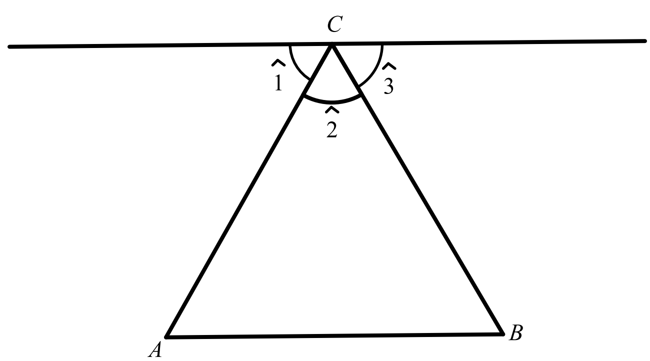


Figura 6.4: Os ângulos internos de um triângulo

Tem-se $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 180°$. Como AC é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta da proposição anterior que $\widehat{1} = \widehat{A}$. Como BC é também transversal às duas paralelas, então $\widehat{3} = \widehat{B}$. Portanto $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$. ∎

Deste resultado seguem outros imediatos.

Corolário 6.9 *a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é* $90°$.

b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede $60°$.

c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$.

O próximo resultado nos diz que retas paralelas são equidistantes. A inversa deste teorema é também verdadeira.

Teorema 6.10 *Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n.*

Demonstração: Sejam m e n retas paralelas. Sobre m tome dois pontos A e A', e deles baixe perpendiculares à reta n. Sejam B e B' respectivamente os pés destas perpendiculares. Devemos provar que $AB = AB'$. Para isto trace $A'B$ como indicado na figura seguinte.

Observe que $A\widehat{A'}B = A'\widehat{B}B'$ e que $A'\widehat{A}B = 90°$. Isto é uma decorrência de que m e n são paralelas e da aplicação da proposição 6.7 ao considerar-se $A'B$ e AB como transversais. Portanto os triângulos $A\widehat{A'}B$ e $B'\widehat{B}A$ são triângulos retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa (comum) congruentes. Segue-se do teorema 5.14 que eles são congruentes. A congruência é a que leva A em B', A' em B e B em A'. Logo $AB = A'B'$, como queríamos demonstrar. ■

Agora apresentaremos a definição de um paralelogramo.

Definição 6.11 *Um paralelogramo é um quadrado cujos lados opostos são paralelos.*

Figura 6.5: Paralelogramo.

Proposição 6.12 *Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um paralelogramo. Trace a diagonal AC. Como AB e DC são paralelos, então $B\widehat{A}C = A\widehat{C}D$. Analogamente, de AD e BC serem paralelos, temos $C\widehat{A}D = A\widehat{C}B$. Além disso, AC é comum aos triângulos ABC e CDA e portanto temos que estes triângulos são congruentes. Logo $\widehat{B} = \widehat{D}$, $AB = CD$ e $BC = DA$. Disto decorre que $\widehat{A} = \widehat{C}$. ■

Proposição 6.13 *As diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é ponto médio das duas diagonais.*

Estes dois resultados dão condições para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

Proposição 6.14 *Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero em que $AB = CD$ e $BC = AD$. Trace a diagonal BD do quadrilátero. Os triângulos ABD e CDB são congruentes de acordo com o terceiro caso de congruência de triângulos. Logo $C\widehat{B}D = B\widehat{D}A$ e $C\widehat{D}B = D\widehat{B}A$. A primeira igualdade garante que BC e AD são paralelos. Log $ABCD$ é um paralelogramo. ■

Outro resultado que temos é o seguinte:

Proposição 6.15 *Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.*

Encerraremos esta aula com mais dois resultados.

Teorema 6.16 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) *Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Uma consequência do Teorema Fundamental da Proporcionalidade é o Teorema de Tales que enunciamos a seguir.

Teorema 6.17 *Se duas retas são transversais a um conjunto de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes das outras.*

Capítulo 7

Semelhança de Triângulos

A teoria da semelhança entre figuras constitui ferramenta importante em muitas áreas tais como Engenharia e Arquitetura, na ampliação e redução de plantas, mapas ou maquetes. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Nesta aula, nos limitaremos aos casos de Semelhança de triângulos. Este tema é fundamental para o desenvolvimento das construções com régua e compasso.

Definição 7.1 *Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

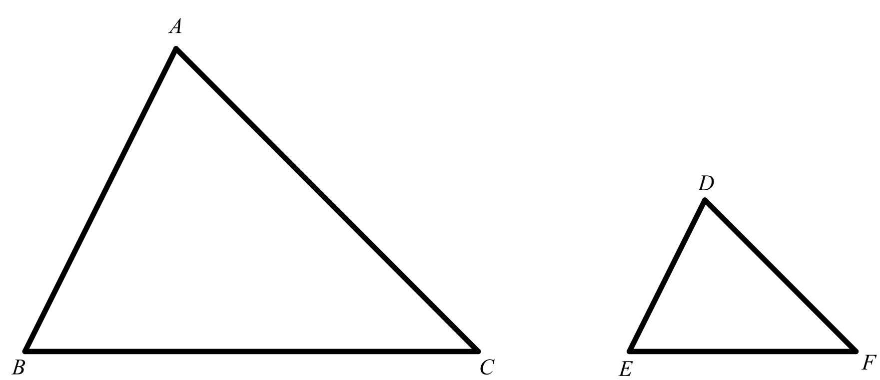


Figura 7.1: Exemplo de dois triângulos semelhantes.

Com esta definição queremos dizer que, se ABC e DEF são dois triângulos semelhantes e se $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$ e $C \longleftrightarrow F$ é a correspondência entre os vértices que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{F} \quad e \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos. Note que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um. Também dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um são congruentes.

Teorema 7.2 *Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$ então os triângulos são semelhantes.*

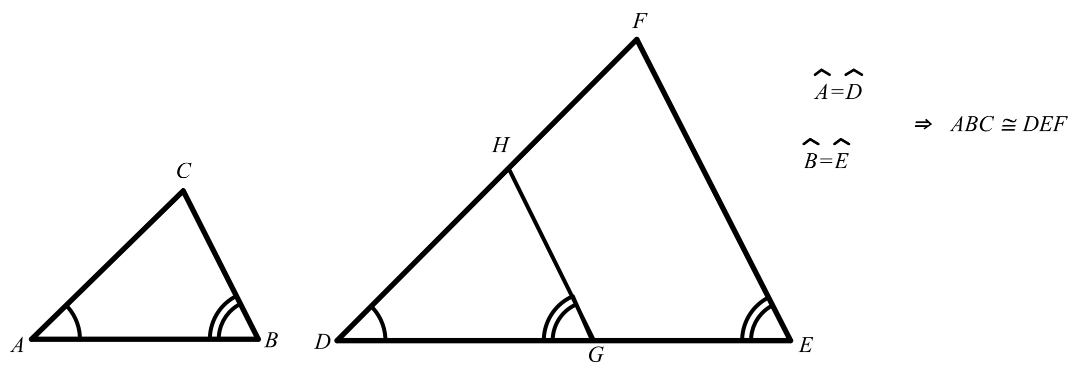


Figura 7.2: Primeiro caso de semelhança de triângulos semelhantes.

Demonstração: Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, então a congruência dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$ acarreta na congruência dos ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome na semi-reta s_{DE} o ponto G de modo que$DG = AB$. Pelo ponto G trace uma reta paralela a EF. Esta corta a semi-reta s_{DF} num ponto H, formando um triângulo DGH que é congruente ao triângulo ABC, já que $\widehat{A} = \widehat{D}, AB = DG, \widehat{B} = \widehat{E} = D\widehat{G}H$. Esta última congruência deve-se ao paralelismo de GH e EF. Segue-se de um resultado da aula anterior que $\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}}$. Como $AB = DG$ e $AC = DH$ então, da igualdade acima obtém-se: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. De maneira análoga demonstra-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$. ■

A seguir apresentamos outro caso de semelhança.

Teorema 7.3 *Se, em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então os triângulos são semelhantes.*

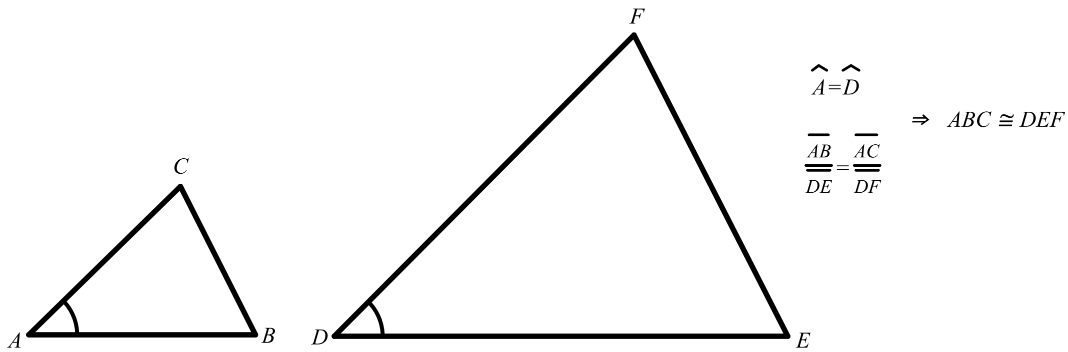


Figura 7.3: Segundo caso de semelhança de triângulos semelhantes.

Demonstração: Construa um triângulo GHI que tenha $GH = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G}$ e $\widehat{H} = \widehat{B}$. De acordo com o teorema 7.2, os triângulos ABC e GHI são semelhantes. Por conseguinte: $\frac{\overline{AB}}{GH} = \frac{\overline{AC}}{GI}$.

Como $GH = DE$, a hipótese $\frac{\overline{AB}}{DE} = \frac{\overline{AC}}{DF}$ e a igualdade acima implicam que:

$$GH = DF.$$

Por construção, $GH = DE$ e $\widehat{G} = \widehat{A} = \widehat{E}$, podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que os triângulos DEF e GHI são congruentes. Como já sabíamos que ABC e GHI eram semelhantes, podemos concluir facilmente que ABC e DEF são semelhantes. ■

O terceiro caso de semelhança é o seguinte:

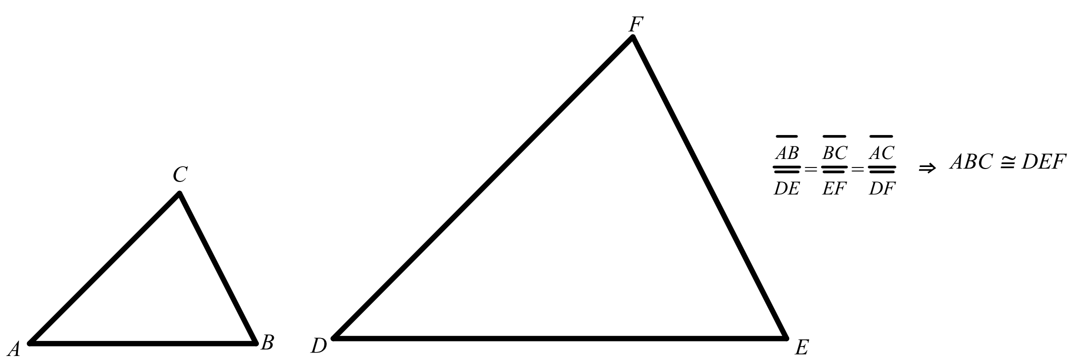


Figura 7.4: Terceiro caso de semelhança de triângulos semelhantes.

Teorema 7.4 *Se, em dois triângulos ABC e DEF, tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}},$$

então os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração: Construa um triângulo GHI que tenha $\widehat{H} = \widehat{A}$, $GH = DE$ e $GI = DF$. Segue-se da hipótese que $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}$. Portanto, de acordo com o teorema 7.3, os triângulos ABC e GHI são semelhantes.

Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HI}}$.

Segue-se que $IJ = FG$. Como já tínhamos que $GH = DE$ e $GI = DF$ (por construção) então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, GHI e DEF são congruentes. Como GHI e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e DEF também são. ■

Apresentaremos a seguir uma sequência de resultados válidos para triângulos retângulos, cujas demonstrações não faremos nesta aula.

Proposição 7.5 *Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

A seguir o Teorema de Pitágoras.

Teorema 7.6 *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Proposição 7.7 *Um triângulo possui lados medindo a, b e c. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a.*

Capítulo 8

Polígonos

Iniciamos esta aula com a definição de poligonal para em seguida apresentarmos o conceito de polígono. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Definição 8.1 *Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos* $P_1, P_2, \cdots, P_n$ *e pelos segmentos* $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \cdots, P_{n-1}P_n$. *Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados.*

Definição 8.2 *Um polígono é uma poligonal em que as seguintes 4 condições são satisfeitas: a)* $P_n = P_1$, *b) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades, c) cada vértice é extremidade de dois lados e d) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.*

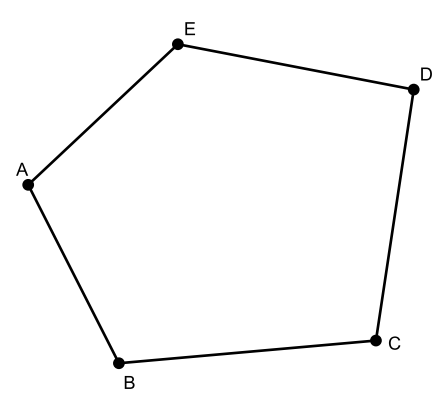


Figura 8.1: Exemplo de um polígono com 5 lados convexo.

Um importante conceito relacionado a polígonos é o convexidade que veremos a seguir.

Definição 8.3 *Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semi-planos determinados pelas retas que contêm os seus lados, ou seja, se nenhum par de pontos que determinam seus lados está em semi-planos opostos.*

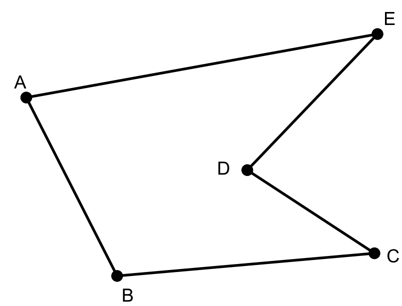


Figura 8.2: Exemplo de um polígono não convexo.

A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada *perímetro* do polígono. Note que em um polígono convexo, as diagonais estão sempre contidas na região limitada pelo polígono.

Os ângulos do polígono convexo são $P_{i-1}\widehat{P_i}P_{i+1}$, com $i = 2, 3, \cdots, n-1$ e também os ângulos $P_{n-1}\widehat{P_n}P_1$ e $P_n\widehat{P_1}P_2$.

São chamados ângulos externos do polígono convexo $P_1, P_2, \cdots, P_n$ cada um dos ângulos $Q_{i-1}\widehat{P_i}P_{i+1}$, com $i = 2, 3, \cdots, n-1$ e também os ângulos $Q_n\widehat{P_n}P_1$ e $Q_1\widehat{P_1}P_2$ em que Q_i, distinto de P_i, é um ponto qualquer da semi-reta $s_{P_iP_{i-1}}$; Q_n, distinto de P_n, é um ponto qualquer da semi-reta $s_{P_nP_{n-1}}$ e Q_1, distinto de P_1, é um ponto qualquer da semi-reta $s_{P_1P_n}$, ou também os seus correspondentes ângulos opostos pelo vértice.

Cada polígono é denominado de acordo com seu número de lados. Dessa forma, um polígono de 3 lados é chamado de triângulo; 4 lados, quadrilátero, um de 5 lados pentágono, um de seis lados, hexágono e, assim, um de n lados é chamado n-ágono.

Neste ponto achamos interessante falar um pouco sobre quadriláteros.

Definição 8.4 *Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.*

Denominaremos por *lados opostos* de um quadrilátero aos lados que não se interceptam e por *lados consecutivos* se os lados tem um vértice em comum.

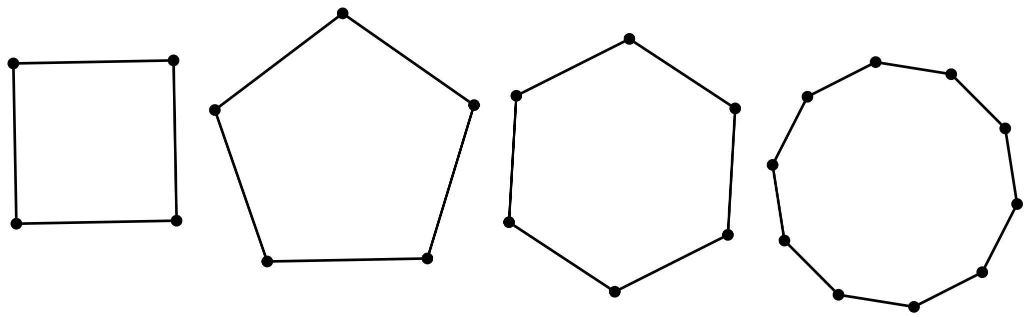


Figura 8.3: Polígonos com 3, 4, 5, 6 e 10 lados.

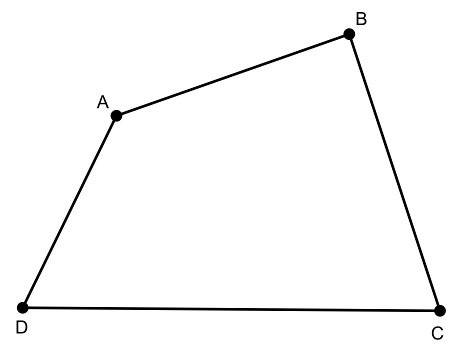


Figura 8.4: Exemplo de um quadrilátero.

Uma *diagonal* é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

Num quadrilátero $ABCD$, AB e CD são lados opostos, também o são os lados BC e AD. Os lados AD e CD ou AD e AB, por exemplo, são exemplos de lados consecutivos, e AC e BD são diagonais.

Consideremos um quadrilátero convexo. Nele, dois ângulos são opostos se não têm um lado comum; caso contrário são chamados ângulos consecutivos.

Definição 8.5 *Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.*

Temos os seguintes resultados que apresentam propriedades dos paralelogramos.

Teorema 8.6 *Em um paralelogramo valem as seguintes propriedades:*

a) Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $ABCD$ é um paralelogramo, então os triângulos ABC (ou ADB) e CDA (ou CDB) são congruentes.

b) Dois lados opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

c) Dois ângulos opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

d) Dois ângulos consecutivos quaisquer em um paralelogramo são suplementares.

Vejamos agora, as definições de losango, retângulo e quadrado.

Definição 8.7 *a) Um losango é um paralelogramo cujos lados são congruentes.*

b) Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são retos.

c) Um quadrado é um retângulo cujos lados são congruentes.

Encerramos esta aula com a definição de polígono regular.

Definição 8.8 *Um polígono regular é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.*

Capítulo 9

Círculos

Nesta aula recordaremos a definição de círculo e apresentaremos alguns resultados relacionados. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Definição 9.1 *O lugar geométrico dos pontos que equidistam de um número real r de um ponto A será chamado de* ***círculo*** *de raio r e é constituído dos pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.*

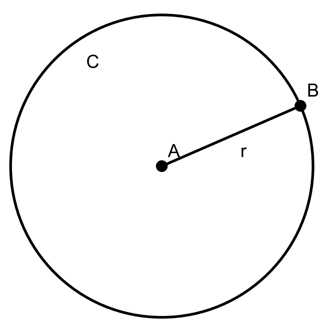


Figura 9.1: Círculo de centro A e raio r.

O segmento ligando dois pontos de um círculo será chamado de *corda*. Toda corda que passa pelo centro do círculo é um *diâmetro*, ou seja, o diâmetro mede $2r$.

Proposição 9.2 *Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.*

Demonstração: Seja O o centro do círculo e OC o raio que é perpendicular a corda AB. Seja M o ponto de interseção da corda com o raio. Como $OA = OB$ (raios) então o triângulo OAB é isósceles com base AB. Logo $\widehat{A} = \widehat{B}$. Se a corda é perpendicular ao raio, então os ângulos $O\widehat{M}A$ e $O\widehat{M}B$ são retos. Como consequência $A\hat{O}M = B\hat{O}M$. Segue-se então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos que $AOM = BOM$. Assim, $AM = BM$.

Inversamente, se $AM = BM$, então pelo terceiro caso de congruência de triângulos deduz-se que: $AOM = BOM$. Como consequência $O\widehat{M}A = O\widehat{M}B$. Mas a soma destes é 180° e disto decorre que $O\widehat{M}A = O\widehat{M}B = 90°$. Portanto a corda é perpendicular ao raio passando por M. ■

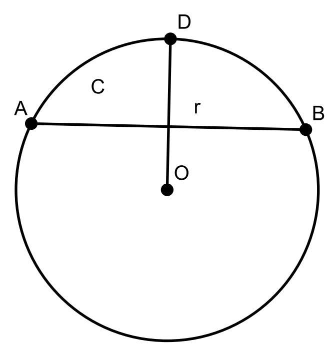


Figura 9.2: Raio perpendicular a uma corda.

Se uma reta e um círculo têm apenas um ponto em comum, dizemos que a reta *tangência* ao círculo e chamamos a reta de tangente ao círculo. O ponto comum entre uma tangente e um círculo é chamado *ponto de tangência* ou *ponto de contato*.

Proposição 9.3 *Se uma reta é tangente a um círculo então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.*

Demonstração: Consideremos um círculo de centro O e uma reta m que lhe seja tangente. Seja T o ponto de tangência. Designemos por P o pé da perpendicular baixada do ponto O à reta m. Gostaríamos de concluir que P e T coincidem. Vamos então supor que P e T são pontos distintos. Então OT é a hipotenusa do triângulo retângulo OPT. Portanto $\overline{OP} < \overline{OT}$. Como OT é um raio, então P é um ponto que está dentro do círculo. Tomemos então um ponto T' sobre a reta m, tal que $PT = PT'$, com $T' \neq T$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos concluímos que $OPT = OPT'$. Portanto $OT = OT'$. Mas então T' é outro ponto da reta m que também pertence ao círculo. Logo a reta m não é tangente. Contradição.

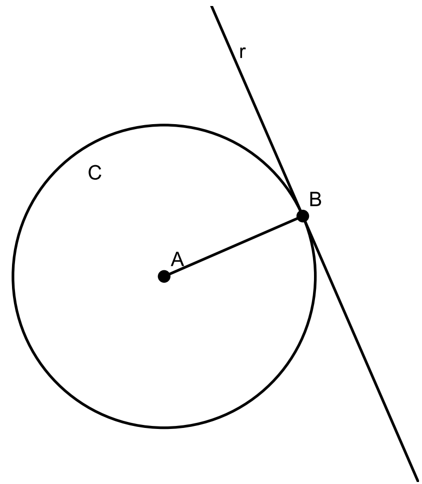


Figura 9.3: Ponto de tangência.

Assim, P e T coincidem, OT é perpendicular a m e a proposição fica demonstrada.
■

Para o próximo resultado, precisamos do conceito de *extremidade de um raio* que consideramos ser a extremidade do segmento do raio que não é o centro do círculo.

Proposição 9.4 *Se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.*

Demonstração: Consideremos um círculo de centro O e seja m uma reta perpendicular ao raio OT passando pelo ponto T. Devemos provar que m é tangente ao círculo, ou seja, que m não tem outro ponto de interseção com o círculo. Seja P qualquer outro ponto de m, então o triângulo OTP é retângulo e portanto $\overline{OT}^2 + \overline{TP}^2 = \overline{OP}^2$. Segue-se que $\overline{OP} > \overline{OT}$ e portanto P está fora do círculo. Logo T é o único ponto comum à reta e ao círculo. Isto conclui a demonstração. ■

Neste ponto podemos concluir que uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a um círculo é que ele seja perpendicular ao raio que une o centro ao ponto de tangência.

Definição 9.5 *Dois círculos são tangentes se possuem uma reta tangente comum e com o mesmo ponto de tangência. Dois círculos são tangentes externa ou internamente, segundo seus centros estejam respectivamente em lados opostos ou do mesmo lado da tangente comum.*

Note que a reta que contém os centros de dois círculos tangentes contém o ponto de contato, isto é, o ponto comum aos dois círculos. Seguem alguns resultados:

1. Uma condição necessária e suficiente para que uma reta contenha o centro de um círculo seja perpendicular a uma corda é que ela interseccione essa corda no seu ponto médio.

2. A mediatriz[1] de uma corda passa pelo centro do círculo.

3. Se uma reta intersecciona o interior de um círculo, então intersecciona o círculo em dois pontos distintos.

A partir deste momento trataremos sobre arcos de círculos.

Definição 9.6 *1. Um ângulo central de um círculo é um ângulo cujo vértice é o centro do círculo.*

2. Sejam A e B pontos de um círculo de centro O. Caso AB seja um diâmetro, então o conjunto dos pontos A e B do círculo situados num mesmo semi-plano determinado pela reta que contém AB é um semi-círculo.

3. Sejam A e B pontos de um círculo de centro O. Caso AB não seja um diâmetro, então o conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos do círculo que estão no interior do ângulo central $A\widehat{O}B$ é chamado um arco menor do círculo; e o conjunto dos pontos A e B e dos pontos exteriores ao ângulo central $A\widehat{O}B$ é chamado arco maior da círculo.

Dizemos que num semi-círculo, um arco menor, ou um arco maior determinam simplesmente um arco do círculo. Os pontos A e B são as extremidades do arco.

Denotamos o arco com extremidades A e B e contendo o ponto X, o qual é denominado arco AXB, por $A\overbrace{X}B$ que também representará sua medida. Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos simplesmente por $\overbrace{AB}$.

Definição 9.7 *A medida em graus, $A\overbrace{X}B$, de um arco é definida como:*

1. Se $A\overbrace{X}B$ é um arco menor, então sua medida é a medida do ângulo central correspondente.

[1] A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e contém seu ponto médio

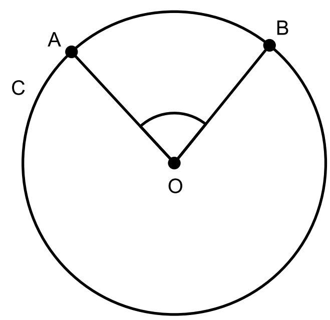


Figura 9.4: Ângulo central AOB.

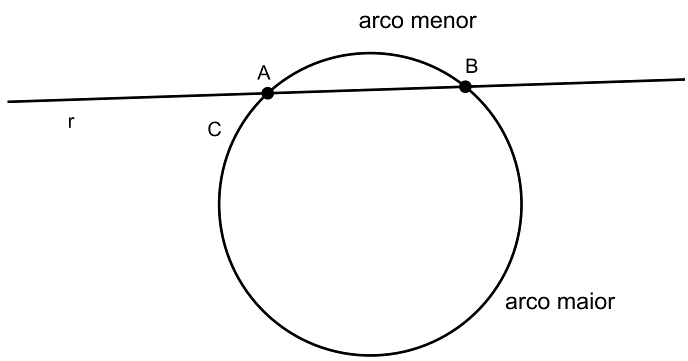


Figura 9.5: Exemplos de Arco menor e Arco maior.

2. *Se* $A\overbrace{X}B$ *é um semi-círculo, então sua medida é* $180°$.

3. *Se* $A\overbrace{Y}B$ *é um arco maior, e* $A\overbrace{X}B$ *é o arco menor correspondente, então* $A\overbrace{Y}B = 360° - A\overbrace{X}B$.

Teorema 9.8 *Se* $\overbrace{AB}$ *e* $\overbrace{BC}$ *são arcos do mesmo círculo, que têm em comum somente o ponto* B*, e se sua união é um círculo* $\overbrace{AC}$*, então* $\overbrace{AC} = \overbrace{AB} + \overbrace{BC}$.

Vejamos agora a definição de ângulo inscrito.

Definição 9.9 *Um ângulo cujo vértice é um ponto de um círculo e cujos lados cortam o círculo em outros dois pontos distintos é um ângulo inscrito nesse círculo. Quando esses dois pontos são extremidades de um diâmetro, dizemos que o ângulo inscrito é um semi-círculo.*

A seguir, apresentamos alguns resultados que achamos importantes.

Resultados

1. A medida de um ângulo inscrito num círculo é a metade da medida do seu arco correspondente.

2. Um ângulo inscrito em um semi-círculo é um ângulo reto.

3. Ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes.

4. Todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida.

5. Sejam AB e CD cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam num ponto P. Então $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

Diremos que um polígono está inscrito num círculo se seus vértices pertencem ao círculo.

Proposição 9.10 *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Para mostrar que ele está inscrito em um círculo deveremos exibir um ponto que seja equidistante de A, B e C. Seja m uma reta perpendicular a BC e passando pelo seu ponto médio M e seja n a reta perpendicular a BC e passando pel seu ponto médio N. Seja P o ponto de interseção destas duas retas. Note que todo ponto de m é equidistante de A e B, e que os pontos de n são equidistantes de B e C. Assim, P é equidistante de A, B e C. ■

Este resultado pode ser enunciado da seguinte forma:

Proposição 9.11 *Três pontos não colineares determinam um círculo.*

Chamamos de *mediatriz* de um dado segmento à reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.

Corolário 9.12 *As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.*

Este ponto que trata o corolário anterior é o centro de um círculo cujo raio é o segmento entre este ponto e um vértice, que chamamos de *círculo circunscrito* pois este inscreve o polígono.

Para polígonos com um mair número de lados, localizar círculos que os inscrevem torna-se mais complicado. Veja um exemplo.

Proposição 9.13 *Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.*

Dizemos que um *círculo* está inscrito em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes ao círculo. Quando tal ocorre diz-se que o polígono *circunscreve* o círculo.

Proposição 9.14 *Todo triângulo possui um círculo inscrito cujo centro é a interseção das bissetrizes do triângulo.*

Recordamos que um polígono regular é um polígono onde todos os seus lados são congruentes e também todos os seus ângulos são congruentes.

Finalizaremos esta aula com os seguinte resultado.

Proposição 9.15 *Todo polígono regular está inscrito em um círculo e também possui um círculo inscrito.*

Capítulo 10

Áreas

Nesta aula apresentamos os axiomas envolvendo áreas de regiões planas. Também veremos alguns resultados relacionados. Alguns textos ao qual nos baseamos e mais completo sobre assunto estão disponível em [1] e [6].

Definição 10.1 *Seja* $\overset{\frown}{AB}$ *um arco de círculo de centro* O *e raio* r*. Chamamos* setor circular*, ou simplesmente* setor*, à reunião de todos os segmentos* OP*, onde* P *é um ponto qualquer de* $\overset{\frown}{AB}$*. O arco* $\overset{\frown}{AB}$ *é chamado* arco de setor *ou* arco de fronteira *e* r *é o seu raio.*

Consideraremos uma classe $\mathcal{M}$ de regiões tal que nela estejam contidas pelo menos todas as regiões poligonais e todos os setores circulares e círculos.

Axioma 10.2 *A cada região de* $\mathcal{M}$ *corresponde um único número real positivo.*

Definição 10.3 *A área de uma região é o número real que lhe corresponde pelo Postulado 10.2.*

Axioma 10.4 *Se* R *e* S *são duas regiões de* $\mathcal{M}$*, com* $R \subset S$*, então a área de* R *é menor que a área de* S*.*

Axioma 10.5 *Se uma região* R *é a união* $R_1 \cup R_2$*, com* R_1 *e* R_2 *sendo regiões que se interseccionam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de* R *é igual à soma das áreas de* R_1 *e* R_2*.*

10.1 Área de Regiões Poligonais

Uma *região poligonal convexa* que, como definimos, é a reunião de um polígono com seu interior, pode ser vista como a união de um número finito de regiões triangulares tais que, se duas quaisquer delas se interseccionam, a interseção é um segmento de reta ou um ponto.

Dessa maneira, daremos ênfase ao estudo de áreas de regiões triangulares. O próximo postulado nos garante que duas regiões triangulares de mesma forma e tamanho têm mesma área.

Axioma 10.6 *Se dois triângulos são congruentes, então suas regiões triangulares têm a mesma área.*

Axioma 10.7 *Se uma região quadrada tem lado de comprimento a, então sua área é a^2.*

A partir deste ponto usaremos "área de um polígono"no lugar de "área de uma região poligonal".

Teorema 10.8 *A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados.*

Demonstração: Consideremos um retângulo com lados não paralelos l_1 e l_2, respectivamente, cuja área denotamos por A.

A partir dele construímos um quadrado Q de lado $l_1 + l_2$, o qual está formado pela união dos quadrados de áreas A_1 e A_2, respectivamente, e retângulos de área A como na figura. Pelo postulado 10.5 temos que a área de Q é

$$2A + A_1 + A_2$$

e, pelo postulado 10.7, temos que a área de Q é

$$(A_1 + A_2)^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2.$$

Destas duas expressões, deduzimos que $A = A_1 \cdot A_2$. ■

Teorema 10.9 *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de seus catetos.*

Demonstração: Consideremos o triângulo PQR retângulo em Q e com catetos a e b. Denotaremos sua área por A.

Seja Q' a interseção da reta paralela à QR que passa por P e da reta paralela PQ que passa por R. O quadrilátero $PQRQ'$ assim formado é um retângulo. Pelo caso L.L.L., os triângulos PQR e $PQ'R$ são congruentes, tendo portanto a mesma área A.

Pelo postulado 10.6, temos que a área do quadrilátero $PQRQ'$ é $2A$ e, pelo teorema 10.9, temos que a área do quadrilátero é $a \cdot b$. Logo, $A = \frac{a \cdot b}{2}$. ■

A partir deste resultado temos condições de expressar alguns resultados para triângulos quaisquer.

Teorema 10.10 *1. A área de um triângulo é a metade do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente.*

2. Dado um triângulo ABC, qualquer outro triângulo tendo lado BC e o terceiro vértice pertencente à reta r, paralela a BC passando por A, terá área igual à área de ABC.

Definição 10.11 *Duas figuras planas que possuem a mesma área são chamadas* figuras equivalentes. *Dizemos que dois* polígonos *são equivalentes quando suas regiões poligonais correspondentes possuírem a mesma área.*

Observação 10.12 *Dado um paralelogramo, se designamos por b o comprimento de um de seus lados e por h o comprimento de um segmento perpendicular a esse lado, unindo-o à reta que contém o lado oposto, então diremos que b é uma base do paralelogramo e h a altura correspondente a essa base. No caso do trapézio, designamos por altura h a distância entre as retas que contém os seus lados paralelos.*

Teorema 10.13 *A área de um paralelogramo é o produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente.*

Demonstração: Consideremos o paralelogramo $PQRS$, escolhamos a base $b = QR$ e $h = PH$ a altura correspondente.

A diagonal PR divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes RQP e RQS, os quais, pelo postulado 10.6, possuem a mesma área $\frac{1}{2}bh$. Dessa maneira, a área de $PQRS$ é $\frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh = bh$. ■

Teorema 10.14 *A área de um trapézio é a metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.*

Demonstração: Consideremos o trapézio $ABCD$. Sejam $b_1 = DC$ e $b_2 = AB$ as bases do trapézio e seja h sua altura.

Agora considere os triângulos ADC e ACB. Usando o postulado 10.6 e o Teorema 1, obtemos que a área de $ABCD$ é a soma das áreas de ADC e ACB, ou seja, $\frac{1}{2}(b_1+b_2)h$

■

Finalizamos esta seção com a área de um losango.

Teorema 10.15 *A área de um losango é a metade do produto de suas diagonais.*

10.2 Comprimento e área de Círculos e Arcos de Círculo

Consideremos um polígono $P_n = A_1 \cdots A_n$ inscrito em uma circunferência, e denotemos por $p_n = (\sum_i = 2^n A_{i-1}A_i) + A_nA_1$

Definição 10.16 *Seja P o conjunto de todos os números p_n que são perímetros de polígonos $A_1A_2 \cdots A_n$ inscritos num círculo. O comprimento c do círculo é definido como $c = supP$*[1]

Para um arco $\overparen{AB}$, definimos de modo análogo: tomamos a linha poligonal $A_1A_2 \cdots A_n$ inscrita no arco, isto é, a união dos segmentos A_1A_2,...,$A_{n-1}A_n$, onde $A_1 = A$,....,$A_n = B$ é uma sequência de pontos pertencentes ao arco $\overparen{AB}$, consideremos p_n o seu comprimento, isto é, $p_n = \sum_i = 2^n A_{i-1}A_i$, tomando P como o conjunto de todos os números p_n que são os comprimentos de todas linhas poligonais em $\overparen{AB}$, o comprimento l do arco $\overparen{AB}$ é definido como $l = supP$.

O resultado seguinte nos diz que a razão entre o comprimento do círculo e o seu diâmetro é o mesmo para todos os círculos.

Teorema 10.17 *Sejam dados dois círculos $C = C(0, r)$ e $C' = C(0, r')$ de comprimentos c e c', respectivamente. Então $\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$.*

A razão constante $\frac{c}{2r}$ é representada pela letra grega π. Como ela é a mesma para todos os círculos, obtemos a fórmula $c = 2\pi r$ para o comprimento de qualquer círculo de raio r. Assim, temos o seguinte resultado.

[1]O número $supP$ representa o supremo do conjunto P.

Corolário 10.18 *O comprimento c de um círculo de raio r é dado pela fórmula $c = 2\pi r$.*

O número π é um número irracional transcendente, isto é, não é raiz de nenhuma equação poligonal com coeficientes inteiros.

Um teorema análogo ao anterior é válido para o comprimento de arco.

Teorema 10.19 *Sejam $\overgroup{AB}$ e $\overgroup{A'B'}$ arcos de circunferências com raios r e r', respectivamente, com a mesma medida em graus. Sejam l e l' os comprimentos de $\overgroup{AB}$ e $\overgroup{A'B'}$, respectivamente. Então $\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'}$.*

Esta razão é chamada *medida em radianos do arco* $\overgroup{AB}$. Se $\overgroup{AB}$ é um arco menor, então $\frac{l}{r}$ é a *medida em radianos do ângulo* BOA.

Encerramos esta seção com uma fórmula para comprimento de arco cuja demonstração deixamos como exercício.

Teorema 10.20 *Se um arco de um círculo de raio r tem medida em graus θ, seu comprimento ℓ é dado por $\ell = \frac{\theta}{180}\pi r$.*

A área de um círculo é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 10.21 *A área de um círculo C de raio r é dada por πr^2.*

Uma consequência direta deste resultado é a de área de um setor circular.

Corolário 10.22 *A área de um setor circular de raio r e arco de fronteira com medida θ, em graus, é dada por $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$.*

Capítulo 11

Prática de Ensino

Nesta aula apresentamos os temas que serão abordados na prática de ensino que será desenvolvida pelos estudantes da disciplina. Dividiremos os estudantes em grupos com aproximadamente seis estudantes e cada grupo destes desenvolverá um dos seguintes temas:

- Tema 0) Neste os estudantes deverão abordar conceitos de retas e ângulos, descrevendo: O que são pontos, retas, segmentos e ângulos.

- Tema 1) Trabalharemos congruência de triângulos. Neste devem ser trabalhados os seguintes itens: Congruência, Os três primeiros casos de congruência de triângulos e consequências e finalizar com um pouco de história.

- Tema 2) Desenvolver as desigualdades geométricas. Neste tema devem ser trabalhados os seguintes itens: O teorema do ângulo externo e suas consequências, O quarto caso de congruência de triângulos, Desigualdade triangular e um pouco de história.

- Tema 3) Trabalhar o assunto semelhança. Neste tema devem ser trabalhados os seguintes itens: Semelhança de triângulos, Teoremas fundamentais sobre semelhança de triângulos, Semelhança nos triângulos retângulos, Teorema de Pitágoras e um pouco de história.

- Tema 4) Este trata de círculos. Neste tema devem ser trabalhados os seguintes itens: O teorema da interseção reta-círculo, arcos de círculos, o círculo de nove pontos, a reta de Euler, O teorema dos dois círculos e um pouco de história.

- Tema 5) Abordar o assunto de áreas. Neste tema devem ser trabalhados os seguintes itens: Áreas de regiões poligonais, Comprimento da circunferência e de arcos de circunferência, Área do círculo e do setor circular e um pouco de história.

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, RJ, 2005.

[2] Bicudo, Irineu. *Os Elementos/Euclides: Tradução e introdução de Irineu Bicudo.* São Paulo, SP, Editora UNESP, 2009.

[3] Eves, H. *Introdução à História da Matemática.* Editora UNICAMP, Campinas, 2004.

[4] Lima, Elon. *Análise Real*, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1997.

[5] Peneireiro, João Batista e Silva, Maurício Fronza. *Geometria Plana e Desenho Geométrico.* Notas de aula, UFRSM, Santa Maria, 2008.

[6] Rezende, Eliane Quelho Frota e Queiroz, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria Plana e Construções Geométricas.* Campinas, Editora UNICAMP, SP, 2000.